Matematika IV – 6. přednáška
Poznámky o šifrách

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

26. 3. 2012

Obsah přednášky

1 Pár slov o šifrách

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- R. B. Ash, Abstract algebra, `http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Algebra.html`.
- Jiří Rosický, *Algebra*, PřF MU, 2002.
- Peter J. Cameron. *Introduction to algebra*, Oxford University Press, 2001, 295 s. (Dostupné v knihovně PřF).
- Alfred J. Menezes, Paul C. van Oorschot and Scott A. Vanstone , *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press, 2001, 780 p., `http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac/`
- Jan Paseka, *Kódování*, elektronický text, MU – `http://www.math.muni.cz/~paseka/ftp/lectures/kodovani.ps`.

Plán přednášky

1 Pár slov o šifrách

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

Důkaz.

Fermatova, resp. Eulerova věta. □

- Korektní naprogramování bez postranních kanálů není triviální (viz např. PKCS#1, RFC 3447).
- Analogicky podepisování (hashů) zpráv (viz např. DSA)
- Viz RSA factoring challenge (např. rozklad 212 ciferného čísla RSA-704 vynese 30 000 USD).

Example

- **Generování klíče.** Alice vybere prvočísla $p = 2357, q = 2551$, and vypočte $n = p \cdot q = 6012707$ a $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 6007800$. Alice zvolí $e = 3674911$ a pomocí Euklidova algoritmu vypočte $d = 422191$ ($e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$). Soukromý klíč Alice je d, veřejný pak (n, e).

Example

- **Generování klíče.** Alice vybere prvočísla $p = 2357, q = 2551$, and vypočte $n = p \cdot q = 6012707$ a $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 6007800$. Alice zvolí $e = 3674911$ a pomocí Euklidova algoritmu vypočte $d = 422191$ ($e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$). Soukromý klíč Alice je d, veřejný pak (n, e).
- Chce-li Bob poslat Alici zprávu $m = 5234673$, pomocí modulárního umocňování vypočte

$$c \equiv m^e \equiv 5234673^{3674911} \equiv 3650502 \pmod{n},$$

a tu odešle Alici.

Example

- **Generování klíče.** Alice vybere prvočísla $p = 2357, q = 2551$, and vypočte $n = p \cdot q = 6012707$ a $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 6007800$. Alice zvolí $e = 3674911$ a pomocí Euklidova algoritmu vypočte $d = 422191$ ($e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$). Soukromý klíč Alice je d, veřejný pak (n, e).
- Chce-li Bob poslat Alici zprávu $m = 5234673$, pomocí modulárního umocňování vypočte

$$c \equiv m^e \equiv 5234673^{3674911} \equiv 3650502 \pmod{n},$$

  a tu odešle Alici.
- Alice zprávu dešifruje díky výpočtu

$$c^d \equiv 3650502^{422191} \equiv 5234673.$$

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b
- Společným klíčem pro komunikaci je g^{ab}.

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b
- Společným klíčem pro komunikaci je g^{ab}.

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, . . .).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b
- Společným klíčem pro komunikaci je g^{ab}.

- Problém diskrétního logaritmu (DLP)
- Nezbytná autentizace (*man in the middle attack*)

Z protokolu DH na výměnu klíčů odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí cyklickou grupu G spolu s generátorem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x, spočítá $h = g^x$ a zveřejní **veřejný klíč** (G, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y$ a $C_2 = M \cdot h^y$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2 / C_1^x$

Z protokolu DH na výměnu klíčů odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí cyklickou grupu G spolu s generátorem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x, spočítá $h = g^x$ a zveřejní **veřejný klíč** (G, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y$ a $C_2 = M \cdot h^y$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2 / C_1^x$

Opět lze odvodit podepisování.

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .
Protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .
Protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Problém diskrétního logaritmu (ECDLP).
Navíc se ukazuje, že eliptické křivky jsou velmi dobře použitelné při faktorizaci prvočísel.