Rezoluce v predikátové logice 1.řádu

Rezoluce

- rezoluční princip: z $F \lor A$, $G \lor \neg A$ odvodit $F \lor G$
- dokazovací metoda používaná
  - v Prologu
  - ve většině systémů pro automatické dokazování

Rezoluce

- rezoluční princip: z $F \vee A$, $G \vee \neg A$ odvodit $F \vee G$
- dokazovací metoda používaná
  - v Prologu
  - ve většině systémů pro automatické dokazování
- procedura pro **vyvrácení**
  - hledáme důkaz pro negaci formule
  - snažíme se dokázat, že negace formule je nesplnitelná
    $\Longrightarrow$ formule je vždy pravdivá

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
    - $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
    - $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
    - $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
    - $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
  - **formule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ všechny klauzule jsou pravdivé
  - prázdná formule je vždy pravdivá (neexistuje klauzule, která by byla nepravdivá)

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
    - $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\iff$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
  - **formule je pravdivá** $\iff$ všechny klauzule jsou pravdivé
  - prázdná formule je vždy pravdivá (neexistuje klauzule, která by byla nepravdivá)
- **množinová notace:** literál je prvek klauzule, klauzule je prvek formule, ...

Splnitelnost

- [Opakování:] Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := "+"$

Splnitelnost

- [Opakování:] Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := "+"$
- Formule je **splnitelná**, existuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - formule je konjunkce klauzulí, tj. všechny klauzule musí být v dané interpretaci pravdivé
  - příklad (pokrač.): F je splnitelná (je pravdivá v $\mathcal{I}_1$)

Splnitelnost

- **[Opakování:]** Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := " + "$
- Formule je **splnitelná**, existuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - formule je konjunkce klauzulí, tj. všechny klauzule musí být v dané interpretaci pravdivé
  - příklad (pokrač.): F je splnitelná (je pravdivá v $\mathcal{I}_1$)
- Formule je **nesplnitelná**, neexistuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - tj. formule je ve všech iterpretacích nepravdivá
  - tj. neexistuje interpretace, ve které by byly všechny klauzule pravdivé
  - příklad: $G = \{\{p(b)\}, \{p(a)\}, \{\neg p(a)\}\}$ je nesplnitelná
    ($\{p(a)\}$ a $\{\neg p(a)\}$ nemohou být zároveň pravdivé)

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit
  z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad\qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit
  z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad\qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí
- příklad:

$$\frac{\{p, r\} \qquad\qquad \{\neg r, s\}}{\{p, s\}} \qquad\qquad \frac{(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)}{p \vee s}$$

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit
  z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí
- příklad:

$$\frac{\{p, r\} \qquad \{\neg r, s\}}{\{p, s\}} \qquad \frac{(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)}{p \vee s}$$

  obě klauzule $(p \vee r)$ a $(\neg r \vee s)$ musí být pravdivé

  protože r nestačí k pravdivosti obou klauzulí,

  musí být pravdivé p (pokud je pravdivé $\neg r$) nebo s (pokud je pravdivé r),

  tedy platí klauzule $p \vee s$

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \dots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \dots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2

  $C_4 = \{\neg q\}$ klauzule z F

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2

  $C_4 = \{\neg q\}$ klauzule z F

  $C_5 = \{p\} = C$ rezolventa C_3 a C_4

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli $\square$**
- Příklad:

$$F \ldots \neg a \vee a$$

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli $\Box$**
- Příklad:

$$F \ldots \neg a \vee a$$

$$G = \neg F \ldots a \wedge \neg a$$

$$G = \neg F \ldots \{\{a\}, \{\neg a\}\}$$

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli $\square$**
- Příklad:

  $F \ldots \neg a \vee a$

  $G = \neg F \ldots a \wedge \neg a$

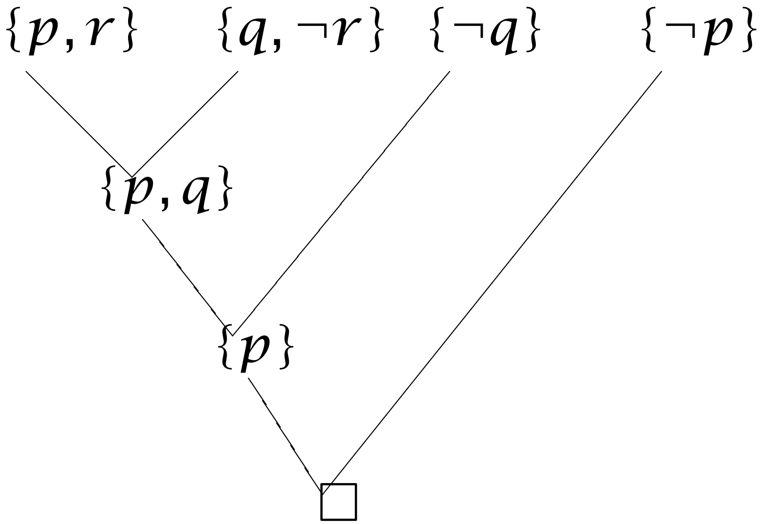
  $G = \neg F \ldots \{\{a\}, \{\neg a\}\}$

  $C_1 = \{a\}, C_2 = \{\neg a\}$

  rezolventa C_1 a C_2 je $\square$, tj. F je vždy pravdivá
- rezoluční důkaz $\square$ z formule G se nazývá **rezoluční vyvrácení formule G**
  - a tedy G je nepravdivá ve všech interpretacích, tj. G je nesplnitelná

Strom rezolučního důkazu

- **strom rezolučního důkazu** klauzule C z formule G je binární strom:
  - kořen je označen klauzulí C,
  - listy jsou označeny klauzulemi z G a
  - každý uzel, který není listem,
    - má bezprostředními potomky označené klauzulemi C_1 a C_2
    - je označen rezolventou klauzulí C_1 a C_2
- příklad: $G = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p\}\}$ $\quad C = \square$

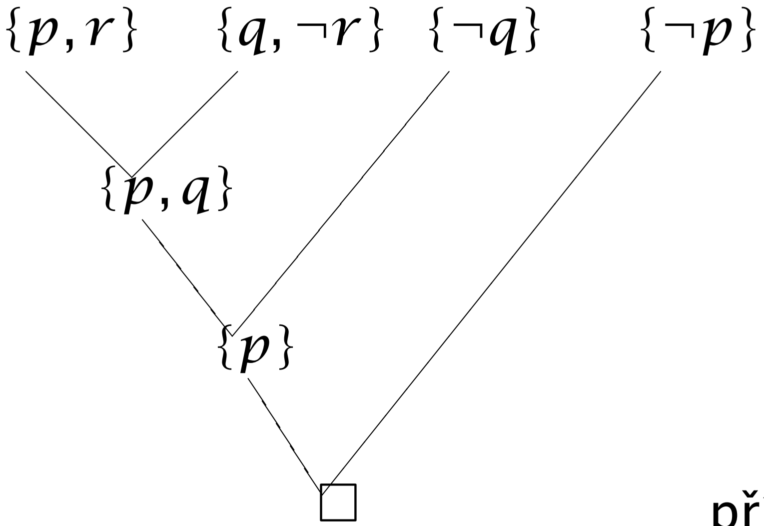


strom rezolučního vyvrácení

(rezoluční důkaz $\square$ z G)

Strom rezolučního důkazu

- **strom rezolučního důkazu** klauzule C z formule G je binární strom:
  - kořen je označen klauzulí C,
  - listy jsou označeny klauzulemi z G a
  - každý uzel, který není listem,
    - má bezprostředními potomky označené klauzulemi C_1 a C_2
    - je označen rezolventou klauzulí C_1 a C_2
- příklad: $G = \{\{p,r\},\{q,\neg r\},\{\neg q\},\{\neg p\}\}$ $\quad C = \square$



strom rezolučního vyvrácení

(rezoluční důkaz $\square$ z G)

příklad: $\{\{p,r\},\{q,\neg r\},\{\neg q\},\{\neg p,t\},\{\neg s\},\{s,\neg t\}\}$

Substituce

- co s proměnnými?   vhodná substituce a unifikace
  - $f(X, a, g(Y)) < 1, f(h(c), a, Z) < 1,\quad X = h(c), Z = g(Y) \Longrightarrow f(h(c), a, g(Y)) < 1$

Substituce

- co s proměnnými? vhodná substituce a unifikace
  - $f(X, a, g(Y)) < 1, f(h(c), a, Z) < 1, \qquad X = h(c), Z = g(Y) \Longrightarrow f(h(c), a, g(Y)) < 1$
- **substituce** je libovolná funkce θ zobrazující výrazy do výrazů tak, že platí
  - $\theta(E) = E$ pro libovolnou konstantu E
  - $\theta(f(E_1, \cdots, E_n)) = f(\theta(E_1), \cdots, \theta(E_n))$ pro libovolný funkční symbol f
  - $\theta(p(E_1, \cdots, E_n)) = p(\theta(E_1), \cdots, \theta(E_n))$ pro libovolný predik. symbol p
- **substituce** je tedy homomorfismus výrazů, který **zachová vše kromě proměnných** – ty lze nahradit čímkoliv
- substituce zapisujeme zpravidla ve tvaru seznamu $[X_1/\xi_1, \cdots, X_n/\xi_n]$ kde X_i jsou proměnné a ξ_i substituované termy
  - příklad: $p(X)[X/f(a)] \equiv p(f(a))$

Substituce

- co s proměnnými? vhodná substituce a unifikace
  - $f(X, a, g(Y)) < 1, f(h(c), a, Z) < 1, \quad X = h(c), Z = g(Y) \Longrightarrow f(h(c), a, g(Y)) < 1$
- **substituce** je libovolná funkce θ zobrazující výrazy do výrazů tak, že platí
  - $\theta(E) = E$ pro libovolnou konstantu E
  - $\theta(f(E_1, \cdots, E_n)) = f(\theta(E_1), \cdots, \theta(E_n))$ pro libovolný funkční symbol f
  - $\theta(p(E_1, \cdots, E_n)) = p(\theta(E_1), \cdots, \theta(E_n))$ pro libovolný predik. symbol p
- **substituce** je tedy homomorfismus výrazů, který **zachová vše kromě proměnných** – ty lze nahradit čímkoliv
- substituce zapisujeme zpravidla ve tvaru seznamu $[X_1/\xi_1, \cdots, X_n/\xi_n]$ kde X_i jsou proměnné a ξ_i substituované termy
  - příklad: $p(X)[X/f(a)] \equiv p(f(a))$
- **přejmenování proměnných**: speciální náhrada proměnných proměnnými
  - příklad: $p(X)[X/Y] \equiv p(Y)$

Unifikace

- Ztotožnění dvou literálů p, q pomocí vhodné substituce σ takové, že $p\sigma = q\sigma$ nazýváme **unifikací** a příslušnou substituci **unifikátorem**.
- **Unifikátorem** množiny S literálů nazýváme substituce θ takovou, že množina

$$S\theta = \{t\theta | t \in S\}$$

  má jediný prvek.

Unifikace

- Ztotožnění dvou literálů p, q pomocí vhodné substituce σ takové, že $p\sigma = q\sigma$ nazýváme **unifikací** a příslušnou substituci **unifikátorem**.
- **Unifikátorem** množiny S literálů nazýváme substituce θ takovou, že množina

$$S\theta = \{t\theta | t \in S\}$$

  má jediný prvek.

  - příklad: $S = \{$ datum(D1, M1, 2003), datum(1, M2, Y2) $\}$
    unifikátor $\theta =$ [D1/1, M1/2, M2/2, Y2/2003] $S\theta = \{$ datum(1, 2, 2003) $\}$

Unifikace

- Ztotožnění dvou literálů p, q pomocí vhodné substituce σ takové, že $p\sigma = q\sigma$ nazýváme **unifikací** a příslušnou substituci **unifikátorem**.
- **Unifikátorem** množiny S literálů nazýváme substituce θ takovou, že množina

  $$S\theta = \{t\theta | t \in S\}$$

  má jediný prvek.

  - příklad: $S = \{$ datum(D1, M1, 2003), datum(1, M2, Y2) $\}$
    unifikátor θ = [D1/1, M1/2, M2/2, Y2/2003] $S\theta = \{$ datum(1, 2, 2003) $\}$
- Unifikátor σ množiny S nazýváme **nejobecnějším unifikátorem** (**mgu – *most general unifier***), jestliže pro libovolný unifikátor θ existuje substituce λ taková, že $\theta = \sigma\lambda$.

Unifikace

- Ztotožnění dvou literálů p, q pomocí vhodné substituce σ takové, že $p\sigma = q\sigma$ nazýváme **unifikací** a příslušnou substituci **unifikátorem**.
- **Unifikátorem** množiny S literálů nazýváme substituce θ takovou, že množina

$$S\theta = \{t\theta | t \in S\}$$

  má jediný prvek.

  - příklad: $S = \{$ datum(D1, M1, 2003), datum(1, M2, Y2) $\}$
    unifikátor θ = [D1/1, M1/2, M2/2, Y2/2003] $S\theta = \{$ datum(1, 2, 2003) $\}$

- Unifikátor σ množiny S nazýváme **nejobecnějším unifikátorem** (**mgu – *most general unifier***), jestliže pro libovolný unifikátor θ existuje substituce λ taková, že $\theta = \sigma\lambda$.

  - příklad (pokrač.): nejobecnější unifikátor σ = [D1/1, Y2/2003, M1/M2],

Unifikace

- Ztotožnění dvou literálů p, q pomocí vhodné substituce σ takové, že $p\sigma = q\sigma$ nazýváme **unifikací** a příslušnou substituci **unifikátorem**.
- **Unifikátorem** množiny S literálů nazýváme substituce θ takovou, že množina

$$S\theta = \{t\theta | t \in S\}$$

  má jediný prvek.
  - příklad: $S = \{$ datum(D1, M1, 2003), datum(1, M2, Y2) $\}$
    unifikátor θ = [D1/1, M1/2, M2/2, Y2/2003] $S\theta = \{$ datum(1, 2, 2003) $\}$
- Unifikátor σ množiny S nazýváme **nejobecnějším unifikátorem** (**mgu – *most general unifier***), jestliže pro libovolný unifikátor θ existuje substituce λ taková, že $\theta = \sigma\lambda$.
  - příklad (pokrač.): nejobecnější unifikátor σ = [D1/1, Y2/2003, M1/M2], λ=[M2/2]

Rezoluční princip v PL1

- základ:
  - rezoluční princip ve výrokové logice $\dfrac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$
  - substituce, unifikátor, nejobecnější unifikátor

Rezoluční princip v PL1

- základ:
  - rezoluční princip ve výrokové logici $\dfrac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$
  - substituce, unifikátor, nejobecnější unifikátor
- **rezoluční princip v PL1** je pravidlo, které
  - připraví příležitost pro uplatnění vlastního rezolučního pravidla nalezením vhodného unifikátoru
  - provede rezoluci a získá rezolventu

Rezoluční princip v PL1

- základ:
  - rezoluční princip ve výrokové logice $$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$
  - substituce, unifikátor, nejobecnější unifikátor
- **rezoluční princip v PL1** je pravidlo, které
  - připraví příležitost pro uplatnění vlastního rezolučního pravidla nalezením vhodného unifikátoru
  - provede rezoluci a získá rezolventu

$$\frac{C_1 \cup \{A\} \qquad \{\neg B\} \cup C_2}{C_1\rho\sigma \cup C_2\sigma}$$

  - kde ρ **je přejmenováním proměnných** takové, že klauzule $(C_1 \cup A)\rho$ a $\{B\} \cup C_2$ nemají společné proměnné
  - σ **je nejobecnější unifikátor** klauzulí $A\rho$ a B

Příklad: rezoluce v PL1

- příklad: $C_1 = \{p(X,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$

Příklad: rezoluce v PL1

- příklad: $C_1 = \{p(X,Y),\quad q(Y)\}\qquad C_2 = \{\neg q(a),\quad s(X,W)\}$
- přejmenování proměnných: $\rho = [X/Z]$

  $C_1 = \{p(Z,Y),\quad q(Y)\}\qquad C_2 = \{\neg q(a),\quad s(X,W)\}$

Příklad: rezoluce v PL1

- příklad: $C_1 = \{p(X,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- přejmenování proměnných: $\rho = [X/Z]$

  $C_1 = \{p(Z,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- nejobecnější unifikátor: $\sigma = [Y/a]$

  $C_1 = \{p(Z,a), \quad q(a)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$

Příklad: rezoluce v PL1

- příklad: $C_1 = \{p(X,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- přejmenování proměnných: $\rho = [X/Z]$

  $C_1 = \{p(Z,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- nejobecnější unifikátor: $\sigma = [Y/a]$

  $C_1 = \{p(Z,a), \quad q(a)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- rezoluční princip: $C = \{p(Z,a), \quad s(X,W)\}$

Příklad: rezoluce v PL1

- příklad: $C_1 = \{p(X,Y),\quad q(Y)\}\qquad C_2 = \{\neg q(a),\quad s(X,W)\}$
- přejmenování proměnných: $\rho = [X/Z]$

  $C_1 = \{p(Z,Y),\quad q(Y)\}\qquad C_2 = \{\neg q(a),\quad s(X,W)\}$
- nejobecnější unifikátor: $\sigma = [Y/a]$

  $C_1 = \{p(Z,a),\quad q(a)\}\qquad C_2 = \{\neg q(a),\quad s(X,W)\}$
- rezoluční princip: $C = \{p(Z,a),\quad s(X,W)\}$

- vyzkoušejte si:

  $C_1 = \{q(X),\quad \neg r(Y),\quad p(X,Y),\quad p(f(Z),f(Z))\}$

  $C_2 = \{n(Y),\quad \neg r(W),\quad \neg p(f(W),f(W)\}$

Rezoluce v PL1

- **Obecný rezoluční princip v PL1**

$$\frac{C_1 \cup \{A_1, \cdots, A_m\} \qquad \{\neg B_1, \cdots, \neg B_n\} \cup C_2}{C_1 \rho \sigma \cup C_2 \sigma}$$

  - kde ρ je přejmenováním proměnných takové, že množiny klauzulí $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, C_1\rho\}$ a $\{B_1, \cdots, B_n, C_2\}$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor množiny $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, B_1, \cdots, B_n\}$

Rezoluce v PL1

Obecný rezoluční princip v PL1

$$\frac{C_1 \cup \{A_1, \cdots, A_m\} \qquad \{\neg B_1, \cdots, \neg B_n\} \cup C_2}{C_1\rho\sigma \cup C_2\sigma}$$

- kde ρ je přejmenováním proměnných takové, že množiny klauzulí $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, C_1\rho\}$ a $\{B_1, \cdots, B_n, C_2\}$ nemají společné proměnné
- σ je nejobecnější unifikátor množiny $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, B_1, \cdots, B_n\}$
- příklad: $A_1 = a(X)$ vs. $\{\neg B_1, \neg B_2\} = \{\neg a(b), \neg a(Z)\}$

  v jednom kroku potřebuji vyrezolvovat zároveň B_1 i B_2

Rezoluce v PL1

- **Obecný rezoluční princip v PL1**

$$\frac{C_1 \cup \{A_1, \cdots, A_m\} \qquad \{\neg B_1, \cdots, \neg B_n\} \cup C_2}{C_1\rho\sigma \cup C_2\sigma}$$

  - kde ρ je přejmenováním proměnných takové, že množiny klauzulí $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, C_1\rho\}$ a $\{B_1, \cdots, B_n, C_2\}$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor množiny $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, B_1, \cdots, B_n\}$
  - příklad: $A_1 = a(X)$ vs. $\{\neg B_1, \neg B_2\} = \{\neg a(b), \neg a(Z)\}$

    v jednom kroku potřebuji vyrezolvovat zároveň B_1 i B_2

- Rezoluce v PL1
  - **korektní**: jestliže existuje rezoluční vyvrácení F, pak F je nesplnitelná
  - **úplná**: jestliže F je nesplnitelná, pak existuje rezoluční vyvrácení F

Zefektivnění rezoluce

- rezoluce je intuitivně efektivnější než axiomatické systémy
  - axiomatické systémy: který z axiomů a pravidel použít?
  - rezoluce: pouze jedno pravidlo

Zefektivnění rezoluce

- rezoluce je intuitivně efektivnější než axiomatické systémy
  - axiomatické systémy: který z axiomů a pravidel použít?
  - rezoluce: pouze jedno pravidlo
- stále ale příliš mnoho možností, jak hledat důkaz v prohledávacím prostoru
- problém SAT$= \{S | S$ je splnitelná $\}$ NP úplný,

  nicméně: menší prohledávací prostor vede k rychlejšímu nalezení řešení
- strategie pro zefektivnění prohledávání $\Rightarrow$ varianty rezoluční metody

Zefektivnění rezoluce

- rezoluce je intuitivně efektivnější než axiomatické systémy
  - axiomatické systémy: který z axiomů a pravidel použít?
  - rezoluce: pouze jedno pravidlo
- stále ale příliš mnoho možností, jak hledat důkaz v prohledávacím prostoru
- problém SAT= $\{S|S$ je splnitelná $\}$ NP úplný,

  nicméně: menší prohledávací prostor vede k rychlejšímu nalezení řešení
- strategie pro zefektivnění prohledávání $\Rightarrow$ varianty rezoluční metody
- vylepšení prohledávání
  - zastavit prohledávání cest, které nejsou slibné
  - specifikace pořadí, jak procházíme alternativními cestami

Varianty rezoluční metody

- **Věta:** Každé omezení rezoluce je korektní.
  - stále víme, že to, co jsme dokázali, platí

Varianty rezoluční metody

- **Věta:** Každé omezení rezoluce je korektní.
  - stále víme, že to, co jsme dokázali, platí
- T-**rezoluce**: klauzule účastnící se rezoluce nejsou tautologie úplná
  - tautologie nepomůže ukázat, že formule je nesplnitelná

Varianty rezoluční metody

- **Věta:** Každé omezení rezoluce je korektní.
  - stále víme, že to, co jsme dokázali, platí
- T-**rezoluce**: klauzule účastnící se rezoluce nejsou tautologie úplná
  - tautologie nepomůže ukázat, že formule je nesplnitelná
- **sémantická rezoluce**: úplná
  zvolíme libovolnou interpretaci a pro rezoluci používáme jen takové klauzule, z nichž alespoň jedna je v této interpretaci nepravdivá
  - pokud jsou obě klauzule pravdivé, těžko odvodíme nesplnitelnost formule

Varianty rezoluční metody

- Věta: Každé omezení rezoluce je korektní.
  - stále víme, že to, co jsme dokázali, platí
- T-**rezoluce**: klauzule účastnící se rezoluce nejsou tautologie úplná
  - tautologie nepomůže ukázat, že formule je nesplnitelná
- **sémantická rezoluce**: úplná
  zvolíme libovolnou interpretaci a pro rezoluci používáme jen takové klauzule, z nichž alespoň jedna je v této interpretaci nepravdivá
  - pokud jsou obě klauzule pravdivé, těžko odvodíme nesplnitelnost formule
- **vstupní (*input*) rezoluce:** neúplná
  alespoň jedna z klauzulí, použitá při rezoluci, je z výchozí **vstupní množiny** S

Varianty rezoluční metody

- **Věta:** Každé omezení rezoluce je korektní.
  - stále víme, že to, co jsme dokázali, platí
- T-**rezoluce**: klauzule učastnící se rezoluce nejsou tautologie úplná
  - tautologie nepomůže ukázat, že formule je nesplnitelná
- **sémantická rezoluce**: úplná
  zvolíme libovolnou interpretaci a pro rezoluci používáme jen takové klauzule, z nichž alespoň jedna je v této interpretaci nepravdivá
  - pokud jsou obě klauzule pravdivé, těžko odvodíme nesplnitelnost formule
- **vstupní (*input*) rezoluce:** neúplná
  alespoň jedna z klauzulí, použitá při rezoluci, je z výchozí **vstupní množiny** S
  - $\{\{p,q\}, \quad \{\neg p,q\}, \quad \{p,\neg q\}, \quad \{\neg p,\neg q\}\}$
    existuje rezoluční vyvrácení
    neexistuje rezoluční vyvrácení pomocí vstupní rezoluce