

Teorie logického programování

Predikátová logika 1.řádu

- PROLOG: PROgramming in LOGic, část predikátové logiky 1.řádu
 - fakta: $\text{rodic}(\text{petr}, \text{petrik}), \forall X a(X)$
 - klauzule: $\forall X \forall Y \text{rodic}(X, Y) \Rightarrow \text{predek}(X, Y)$
- Predikátová logika I. řádu (PL1)
 - soubory objektů: lidé, čísla, body prostoru, ...
 - syntaxe PL1, sémantika PL1, pravdivost a dokazatelnost
- Rezoluce ve výrokové logice, v PL1
 - dokazovací metoda
- Rezoluce v logickém programování
- Backtracking, řez, negace vs. rezoluce

Hana Rudová, Logické programování I, 25. března 2013

2

Teorie logického programování

Predikátová logika I. řádu (PL1)

Abeceda \mathcal{A} jazyka \mathcal{L} PL1 se skládá ze symbolů:

- **proměnné** X, Y, \dots označují libovolný objekt z daného oboru
- **funkční symboly** f, g, \dots označují operace (příklad: $+, \times$)
 - **arita** = počet argumentů, n -ární symbol, značíme f/n
 - nulární funkční symboly – **konstanty**: označují význačné objekty (příklad: $0, 1, \dots$)
- **predikátové symboly** p, q, \dots pro vyjádření vlastností a vztahů mezi objekty
 - **arita** = počet argumentů, n -ární symbol, značíme p/n příklad: $<, \in$
- **logické spojky** $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \equiv$
- **kvantifikátory** \forall, \exists
 - logika I. řádu používá **kvantifikaci pouze pro individua** (odlišnost od logik vyššího řádu)
 - v logice 1. řádu nelze: $\forall \mathbb{R} : \forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- **závorky**: $), ($

Hana Rudová, Logické programování I, 25. března 2013

3

Predikátová logika

Jazyky PL1

- Specifikace jazyka \mathcal{L} je definována funkčními a predikátovými symboly
symboly tedy určují oblast, kterou jazyk popisuje
- **Jazyky s rovností**: obsahují predikátový symbol pro rovnost „=”

Příklady

- jazyk teorie uspořádání
 - jazyk $s =$, binární predikátový symbol $<$
- jazyk teorie množin
 - jazyk $s =$, binární predikátový symbol \in
- jazyk elementární aritmetiky
 - jazyk $s =$, nulární funkční symbol 0 pro nulu,
unární funkční symbol s pro operaci následníka,
binární funkční symboly pro sčítání $+$ a násobení \times

Hana Rudová, Logické programování I, 25. března 2013

4

Predikátová logika

Term, atomická formule, formule

- **Term** nad abecedou \mathcal{A}
 - každá proměnná z \mathcal{A} je term
 - je-li f/n z \mathcal{A} a t_1, \dots, t_n jsou termy, pak $f(t_1, \dots, t_n)$ je také term
 - každý term vznikne konečným počtem užití přechozích kroků $f(X, g(X, 0))$
- **Atomická formule (atom)** nad abecedou \mathcal{A}
 - je-li p/n z \mathcal{A} a t_1, \dots, t_n jsou termy, pak $p(t_1, \dots, t_n)$ je atomická formule $f(X) < g(X, 0)$
- **Formule** nad abecedou \mathcal{A}
 - každá atomická formule je formule
 - jsou-li F a G formule, pak také $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \Rightarrow G), (F \equiv G)$ jsou formule
 - je-li X proměnná a F formule, pak také $(\forall X F)$ a $(\exists X F)$ jsou formule
 - každá formule vznikne konečným počtem užití přechozích kroků $(\exists X ((f(X) = 0) \wedge p(0)))$

Sémantika formulí

- **Ohodnocení proměnné** $\varphi(X)$: každé proměnné X je přiřazen prvek $|I|$
- **Hodnota termu** $\varphi(t)$: každému termu je přiřazen prvek univerza
 - příklad: necht' $\varphi(X) := 0$
 - $\varphi(\text{plus}(s(\text{zero}), X)) = \varphi(s(\text{zero})) + \varphi(X) = (1 + \varphi(\text{zero})) + 0 = (1 + 0) + 0 = 1$
- Každá **dobře utvořená formule** označuje **pravdivostní hodnotu** (PRAVDA, NEPRAVDA) v závislosti na své struktuře a interpretaci
- **Pravdivá formule** $I \models_{\varphi} Q$: formule Q označena PRAVDA
- **Nepravdivá formule** $I \not\models_{\varphi} Q$: formule Q označena NEPRAVDA
 - příklad: $p/1$ predikátový symbol, tj. $p \subseteq |I| \quad p := \{\langle 1 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle, \dots\}$
 - $I \models p(\text{zero}) \wedge p(s(\text{zero}))$ iff $I \models p(\text{zero})$ a $I \models p(s(\text{zero}))$
 - iff $\langle \varphi(\text{zero}) \rangle \in p$ a $\langle \varphi(s(\text{zero})) \rangle \in p$
 - iff $\langle \varphi(\text{zero}) \rangle \in p$ a $\langle (1 + \varphi(\text{zero})) \rangle \in p$
 - iff $\langle 0 \rangle \in p$ a $\langle 1 \rangle \in p$
 - $\langle 1 \rangle \in p$ ale $\langle 0 \rangle \notin p$, tedy formule je nepravdivá v I

Interpretace

- **Interpretace** I jazyka \mathcal{L} nad abecedou \mathcal{A} je dána
 - neprázdnou množinou \mathcal{D} (také značíme $|I|$, nazývá se **univerzum**) a
 - zobrazením, které
 - každé konstantě $c \in \mathcal{A}$ přiřadí nějaký **prvek** \mathcal{D}
 - každému funkčnímu symbolu $f/n \in \mathcal{A}$ přiřadí n -ární **operaci** nad \mathcal{D}
 - každému predikátovému symbolu $p/n \in \mathcal{A}$ přiřadí n -ární **relaci** nad \mathcal{D}
- **Příklad: uspořádání na \mathbb{R}**
 - jazyk: predikátový symbol $\text{mensi}/2$
 - interpretace: univerzum \mathbb{R} ; zobrazení: $\text{mensi}(x, y) := x < y$
- **Příklad: elementární aritmetika nad množinou \mathbb{N} (včetně 0)**
 - jazyk: konstanta zero , funční symboly $s/1$, $\text{plus}/2$
 - interpretace:
 - univerzum \mathbb{N} ; zobrazení: $\text{zero} := 0, \quad s(x) := 1 + x, \quad \text{plus}(x, y) := x + y$

Model

- Interpretace se nazývá **modelem** formule, je-li v ní tato formule pravdivá
 - interpretace množiny \mathbb{N} s obvyklými operacemi je modelem formule $(1 + s(0) = s(s(0)))$
 - interpretace, která se liší přiřazením $s/1$: $s(x) := x$ není modelem této formule
- **Teorie \mathcal{T}** jazyka \mathcal{L} je množina formulí jazyka \mathcal{L} , tzv. **axiomů**
 - $\neg s(X) = 0$ je jeden z axiomů teorie elementární aritmetiky
- **Model teorie**: libovolná interpretace, která je modelem všech jejích axiomů
 - všechny axiomy teorie musí být v této interpretaci pravdivé
- **Pravdivá formule v teorii** $\mathcal{T} \models F$: pravdivá v každém z modelů teorie \mathcal{T}
 - říkáme také formule **platí v teorii** nebo je **splněna v teorii**
 - formule $1 + s(0) = s(s(0))$ je pravdivá v teorii elementárních čísel
- **Logicky pravdivá formule** $\models F$: libovolná interpretace je jejím modelem
 - nebo-li F je pravdivá v každém modelu libovolné teorie
 - formule $G \vee \neg G$ je logicky pravdivá, formule $1 + s(0) = s(s(0))$ není logicky pravdivá

Zkoumání pravdivosti formulí

- Zjištění pravdivosti provádíme důkazem

Důkaz: libovolná posloupnost F_1, \dots, F_n formulí jazyka \mathcal{L} , v níž každé F_i je buď axiom teorie jazyka \mathcal{L} nebo lze F_i odvodit z předchozích F_j ($j < i$) použitím určitých **odvozovacích pravidel**

- Odvozovací pravidla – příklady

- **pravidlo modus ponens:** z formulí F a $F \Rightarrow G$ lze odvodit G
- **rezoluční princip:** z formulí $F \vee A$, $G \vee \neg A$ odvodit $F \vee G$

- F je **dokazatelná z formulí** A_1, \dots, A_n

$$A_1, \dots, A_n \vdash F$$

existuje-li důkaz F z A_1, \dots, A_n

- Dokazatelné formule v teorii \mathcal{T} nazýváme **teorémy** teorie \mathcal{T}

Korektnost a úplnost

- **Uzavřená formule:** neobsahuje volnou proměnnou (bez kvantifikace)

- $\forall Y ((0 < Y) \wedge (\exists X (X < Y)))$ je uzavřená formule
- $(\exists X (X < Y))$ není uzavřená formule

- Množina odvozovacích pravidel se nazývá **korektní**, jestliže pro každou množinu uzavřených formulí \mathcal{P} a každou uzavřenou formuli F platí:

$$\text{jestliže } \mathcal{P} \vdash F \text{ pak } \mathcal{P} \models F \quad (\text{jestliže je něco dokazatelné, pak to platí})$$

Odvozovací pravidla jsou **úplná**, jestliže

$$\text{jestliže } \mathcal{P} \models F \text{ pak } \mathcal{P} \vdash F \quad (\text{jestliže něco platí, pak je to dokazatelné})$$

- PL1: úplná a korektní dokazatelnost, tj.

pro teorii \mathcal{T} s množinou axiomů \mathcal{A} platí: $\mathcal{T} \models F$ **právě když** $\mathcal{A} \vdash F$