IB013 Logické programování

Hana Rudová

jaro 2013

Hodnocení předmětu

- **Průběžná písemná práce:** až 30 bodů (základy programování v Prologu)
  - pro každého jediný termín: **26.března**
  - alternativní termín pouze v případech závažných důvodů pro neúčast
  - vzor písemky na webu předmětu
- **Závěrečná písemná práce:** až 150 bodů
  - vzor písemky na webu předmětu
  - opravný termín možný jako ústní zkouška
- **Zápočtový projekt:** celkem až 40 bodů
- Hodnocení: součet bodů za projekt a za obě písemky
  - známka A za cca 175 bodů, známka F za cca 110 bodů
  - známka bude zapsána pouze těm, kteří dostanou zápočet za projekt
- Ukončení předmětu zápočtem: zápočet udělen za zápočtový projekt

Základní informace

- **Přednáška:** účast není povinná, nicméně ...
- **Cvičení:** účast povinná
  - individuální doplňující příklady za zmeškaná cvičení
    - nelze při vysoké neúčasti na cvičení
  - skupina 01, sudá středa, první cvičení **6.března**, Hana Rudová
  - skupina 02, lichá středa, první cvičení **27.února**, Adriana Strejčková
- **Předpoklad:** znalost základů výrokové a predikátové logiky, např. z IB101
- **Web předmětu: interaktivní osnova v ISu**
  - průsvitky dostupné postupně v průběhu semestru
  - sbírka příkladů včetně řešení (zveřejněna cca do 8.3.)
  - harmonogram výuky, předběžný obsah výuky během semestru
  - elektronicky dostupné materiály
  - informace o zápočtových projektech

Rámcový obsah předmětu

Obsah přednášky

- základy programování v jazyce Prolog
- teorie logického programováni
- logické programování s omezujícími podmínkami
- DC gramatiky

Obsah cvičení

- zaměřeno na praktické aspekty, u počítačů
- programování v Prologu
  - logické programování
  - logické programování s omezujícími podmínkami

Literatura

- Bratko, I. **Prolog Programming for Artificial Intelligence.** Addison-Wesley, 2001.
  - prezenčně v knihovně
- Clocksin, W. F. – Mellish, Ch. S. **Programming in Prolog.** Springer, 1994.
- Sterling, L. – Shapiro, E. Y. **The art of Prolog : advanced programming techniques.** MIT Press, 1987.
- Nerode, A. – Shore, R. A. **Logic for applications.** Springer-Verlag, 1993.
  - prezenčně v knihovně
- Dechter, R. **Constraint Processing.** Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
  - prezenčně v knihovně

+ Elektronicky dostupné materiály (viz web předmětu)

Průběžná písemná práce

- Pro každého jediný termín **26. března**
- Alternativní termín pouze v závažných důvodech pro neúčast
- Celkem až 30 bodů (150 závěrečná písemka, 40 projekt)
- 3 příklady, 40 minut
- Napsat zadaný predikát, porovnat chování programů
- Obsah: první čtyři přednášky a první dvě cvičení
- Oblasti, kterých se budou příklady zejména týkat
  - unifikace
  - backtracking
  - řez
  - seznamy
  - optimalizace posledního volání
  - aritmetika
- Ukázka průběžné písemné práce na webu

Zápočtové projekty

- Zadání, dotazy, odevzdávání: **Adriana Strejčková**
- Týmová práce na projektech, až 3 řešitelé
  - zápočtové projekty dostupné přes web předmětu
- Podrobné **pokyny k zápočtovým projektům** na webu předmětu
  - bodování, obsah předběžné zprávy a projektu
  - typ projektu: LP, CLP
- **Předběžná zpráva**
  - podrobné zadání
  - v jakém rozsahu chcete úlohu řešit
  - které vstupní informace bude program používat a co bude výstupem programu
  - scénáře použití programu (tj. ukázky dvojic konkrétních vstupů a výstupů)

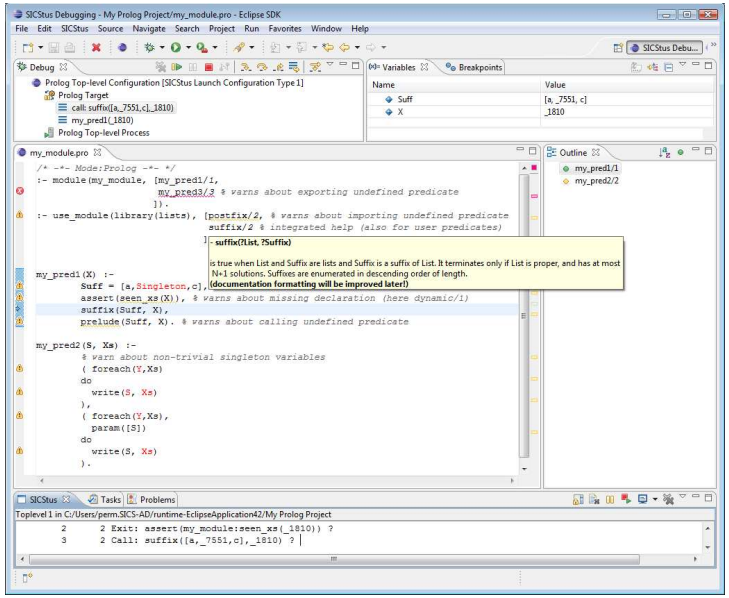
Časový harmonogram k projektům

- Zveřejnění zadání (většiny) projektů: **26. února**
- Zahájení registrace řešitelů projektu: **13. března, 19:00**
- Předběžná analýza řešeného problému: **12. dubna**
- Odevzdání projektů: **17. května**
- Předvádění projektů (po registraci): **23.května – 20.června**

Software: SICStus Prolog

- Doporučovaná implementace Prologu
- Dokumentace: `http://www.fi.muni.cz/~hanka/sicstus/doc/html`
- Komerční produkt
  - licence pro instalace na domácí počítače studentů
- Používané IDE pro SICStus Prolog SPIDER
  - dostupné od verze SICStus 4.1.3
  - `http://www.sics.se/sicstus/spider`
  - používá Eclipse SDK
- Podrobné informace dostupné přes web předmětu
  - stažení SICStus Prologu (sw + licenční klíče)
  - pokyny k instalaci (SICStus Prolog, Eclipse, Spider)

SICStus IDE SPIDER



převzato z `http://www.sics.se/sicstus/spider`

Úvod do Prologu

Prolog

- PROgramming in LOGic
  - část predikátové logiky prvního řádu
- Deklarativní programování
  - specifikační jazyk, jasná sémantika, nevhodné pro procedurální postupy
  - **Co dělat** namísto **Jak dělat**
- Základní mechanismy
  - unifikace, stromové datové struktury, automatický backtracking

Logické programování

Historie

- Rozvoj začíná po roce 1970
- Robert Kowalski – teoretické základy
- Alain Colmerauer, David Warren *(Warren Abstract Machine)* – implementace
- SICStus Prolog vyvíjen od roku 1985
- Logické programování s omezujícími podmínkami – od poloviny 80. let

Aplikace

- rozpoznávání řeči, telekomunikace, biotechnologie, logistika, plánování, data mining, business rules, ...

- SICStus Prolog — the first 25 years, Mats Carlsson, Per Mildner. Theory and Practice of Logic Programming, 12 (1-2): 35-66, 2012. http://arxiv.org/abs/1011.5640.

Program = fakta + pravidla

- **(Prologovský) program** je **seznam programových klauzulí**
  - programové klauzule: fakt, pravidlo
- **Fakt:** deklaruje vždy pravdivé věci
  - `clovek( novak, 18, student ).`
- **Pravidlo:** deklaruje věci, jejichž pravdivost závisí na daných podmínkách
  - `studuje( X ) :- clovek( X, _Vek, student ).`
  - **alternativní (obousměrný) význam pravidel**

    pro každé X, pro každé X,
    X studuje, jestliže X je student, potom
    X je student X studuje
  - `pracuje( X ) :- clovek( X, _Vek, CoDela ), prace( CoDela ).`
- **Predikát:** seznam pravidel a faktů se stejným **funktorem** a **aritou**
  - značíme: `clovek/3`, `student/1`; analogie **procedury** v procedurálních jazycích,

Komentáře k syntaxi

- Klauzule ukončeny tečkou
- Základní příklady argumentů
  - **konstanty**: (`tomas`, `anna`) ... začínají malým písmenem
  - **proměnné**
    - `X`, `Y` ... začínají velkým písmenem
    - `_`, `_A`, `_B` ... začínají podtržítkem (nezajímá nás vracená hodnota)
- Psaní komentářů

```
clovek( novak, 18, student ).          % komentář na konci řádku
clovek( novotny, 30, ucitel ).           /* komentář */
```


Dotaz

- **Dotaz**: uživatel se ptá programu, zda jsou věci pravdivé

```
?- studuje( novak ).          % yes     splnitelný dotaz
?- studuje( novotny ).        % no      nesplnitelný dotaz
```

- **Odpověď** na dotaz
  - positivní – **dotaz je splnitelný a uspěl**
  - negativní – **dotaz je nesplnitelný a neuspěl**
- Proměnné jsou během výpočtu **instanciovány** (= nahrazeny objekty)
  - `?- clovek( novak, 18, Prace ).`
    `Prace = student`
  - výsledkem dotazu je **instanciace proměnných** v dotazu
  - dosud nenainstanciovaná proměnná: **volná proměnná**
- Prolog umí generovat více odpovědí, pokud existují

```
?- clovek( novak, Vek, Prace ).        %  všechna řešení přes ";"
```

Klauzule = fakt, pravidlo, dotaz

- **Klauzule** se skládá z **hlavy** a **těla**
- Tělo je **seznam cílů** oddělených čárkami, čárka = konjunkce
- **Fakt**: pouze hlava, prázdné tělo
  - `rodic( pavla, robert ).`
- **Pravidlo**: hlava i tělo
  - `upracovany_clovek( X ) :- clovek( X, _Vek, Prace ), prace( Prace, tezka ).`
- **Dotaz**: prázdná hlava, pouze tělo
  - `?- clovek( novak, Vek, Prace ).`
    `?- rodic( pavla, Dite ), rodic( Dite, Vnuk ).`

Rekurzivní pravidla

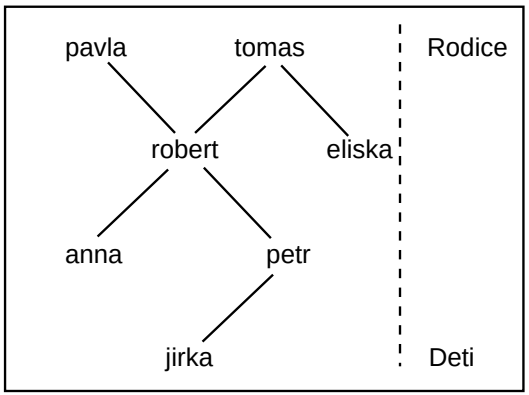
```
predek( X, Z ) :- rodic( X, Z ).            % (1)

predek( X, Z ) :- rodic( X, Y ),            % (2)
                  rodic( Y, Z ).

predek( X, Z ) :- rodic( X, Y ),            % (2')
                  predek( Y, Z ).
```


Příklad: rodokmen

```
rodic( pavla, robert ).
rodic( tomas, robert ).
rodic( tomas, eliska ).
rodic( robert, anna ).
rodic( robert, petr ).
rodic( petr, jirka ).
```

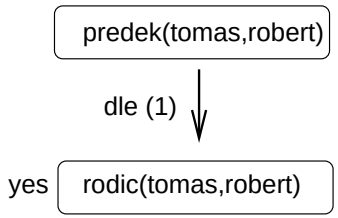



```
predek( X, Z ) :- rodic( X, Z ).      % (1)

predek( X, Z ) :- rodic( X, Y ),      % (2')
                  predek( Y, Z ).
```

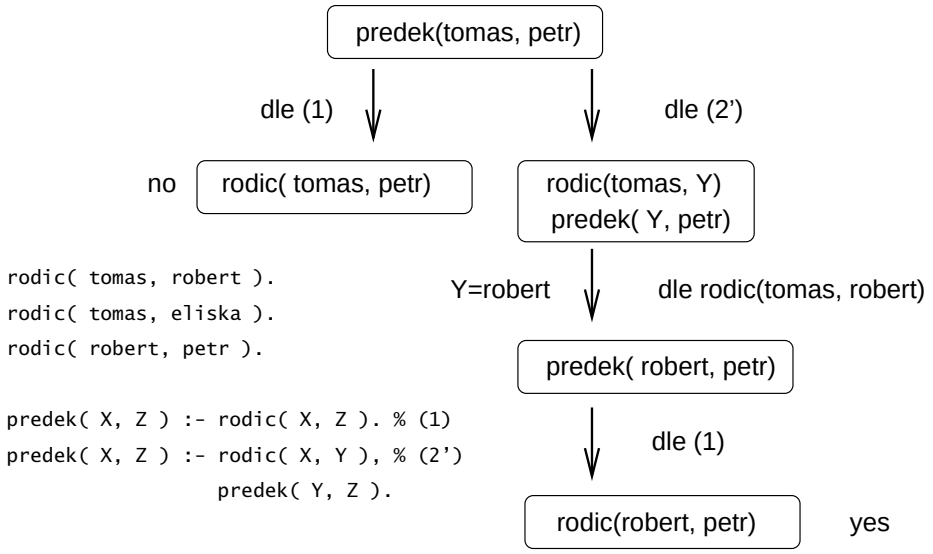

Výpočet odpovědi na dotaz ?- predek(tomas,robert)

```
rodic( pavla, robert ).
rodic( tomas, robert ).
rodic( tomas, eliska ).
rodic( robert, anna ).
rodic( robert, petr ).
rodic( petr, jirka ).
```




```
predek( X, Z ) :- rodic( X, Z ).      % (1)
predek( X, Z ) :- rodic( X, Y ),      % (2')
                  predek( Y, Z ).
```

Výpočet odpovědi na dotaz ?- predek(tomas, petr)

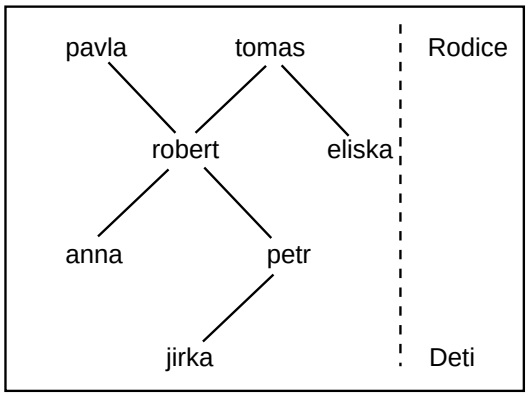



```
rodic( tomas, robert ).
rodic( tomas, eliska ).
rodic( robert, petr ).

predek( X, Z ) :- rodic( X, Z ). % (1)
predek( X, Z ) :- rodic( X, Y ), % (2')
                  predek( Y, Z ).
```


Odpověď na dotaz s proměnnou

```
rodic( pavla, robert ).
rodic( tomas, robert ).
rodic( tomas, eliska ).
rodic( robert, anna ).
rodic( robert, petr ).
rodic( petr, jirka ).
```




```
predek( X, Z ) :- rodic( X, Z ).     % (1)
predek( X, Z ) :- rodic( X, Y ),     % (2')
                  predek( Y, Z ).
```

```
predek(petr,Potomek) --> ???                    Potomek=jirka
predek(robert,P) --> ???          1. P=anna, 2. P=petr, 3. P=jirka
```


Syntaxe a význam Prologovských programů

Syntaxe Prologovských programů

- **Typy objektů jsou rozpoznávány podle syntaxe**
- **Atom**
  - řetězce písmen, čísel, „_" začínající malým písmenem: `pavel, pavel_novak, x25`
  - řetězce speciálních znaků: `<-->, ====>`
  - řetězce v apostrofech: `'Pavel', 'Pavel Novák'`
- Celá a reálná **čísla**: `0, -1056, 0.35`
- **Proměnná**
  - řetězce písmen, čísel, „_" začínající velkým písmenem nebo „_"
  - **anonymní proměnná**: `ma_dite(X) :- rodic( X, _ ).`
    - hodnotu anonymní proměnné Prolog na dotaz nevrací: `?- rodic( X, _ )`
  - lexikální rozsah proměnné je pouze jedna klauzule:

```
prvni(X,X,X).
prvni(X,X,_).
```

Termy

- **Term** – datové objekty v Prologu: `datum( 1, kveten, 2003 )`
  - **funktor**: `datum`
  - **argumenty**: `1, kveten, 2003`
  - **arita** – počet argumentů: 3
- Všechny strukturované objekty v Prologu jsou **stromy**
  - `trojuhelnik( bod(4,2), bod(6,4), bod(7,1) )`
- **Hlavní funktor** termu – funktor v kořenu stromu odpovídající termu
  - `trojuhelnik` je hlavní funktor v `trojuhelnik( bod(4,2), bod(6,4), bod(7,1) )`

Unifikace

- Termy jsou **unifikovatelné**, jestliže
  - jsou identické nebo
  - proměnné v obou termech mohou být instanciovány tak, že termy jsou po substituci identické
  - `datum( D1, M1, 2003 ) = datum( 1, M2, Y2)` **operátor =**
    `D1 = 1, M1 = M2, Y2 = 2003`
- Hledáme **nejobecnější unifikátor** *(most general unifier (MGU)*
  - jiné instanciace? ...`D1 = 1, M1 = 5, Y2 = 2003` ... není MGU
  - `?- datum( D1, M1, 2003 ) = datum( 1, M2, Y2), D1 = M1.`
- **Test výskytu** *(occurs check)*

```
?- X=f(X).
X = f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(...))))))))))
```


Unifikace

Termy S a T jsou unifikovatelné, jestliže

1. S a T jsou konstanty a tyto konstanty jsou identické;
2. S je proměnná a T cokoliv jiného – S je instanciována na T;
   T je proměnná a S cokoliv jiného – T je instanciována na S
3. S a T jsou termy
   - S a T mají stejný funktor a aritu a
   - všechny jejich odpovídající argumenty jsou unifikovatelné
   - výsledná substituce je určena unifikací argumentů

Příklady:

```
k = k ... yes, k1 = k2 ... no, A = k(2,3) ... yes, k(s,a,l(1)) = A ... yes
s(sss(2),B,ss(2)) = s(sss(2),4,ss(2),s(1))... no
s(sss(A),4,ss(3)) = s(sss(2),4,ss(A))... no
s(sss(A),4,ss(C)) = s(sss(t(B)),4,ss(A))... A=t(B),C=t(B)... yes
```


Deklarativní a procedurální význam programů

- `p :- q, r.`
- Deklarativní: **Co** je výstupem programu?
  - p je pravdivé, jestliže q a r jsou pravdivé
  - Z q a r plyne p

  ⇒ význam mají logické relace
- Procedurální: **Jak** vypočítáme výstup programu?
  - p vyřešíme tak, že **nejprve** vyřešíme q a **pak** r

  ⇒ kromě logických relací je významné i pořadí cílů
  - výstup
    - indikátor yes/no určující, zda byly cíle splněny
    - instanciace proměnných v případě splnění cílů

Konjunce "," vs. disjunkce ";" cílů

- **Konjunce** = nutné splnění **všech cílů**
  - `p :- q, r.`
- **Disjunkce** = stačí splnění **libovolného cíle**
  - `p :- q; r.`

```
p :- q.
p :- r.
```

  - priorita středníku je vyšší (viz ekvivalentní zápisy):

```
p :- q, r; s, t, u.

p :- (q, r) ; (s, t, u).

p :- q, r.
p :- s, t, u.
```


Pořadí klauzulí a cílů

```
(a) a(1).                                          ?- a(1).
    a(X) :- b(X,Y), a(Y).
    b(1,1).

(b) a(X) :- b(X,Y), a(Y).      % změněné pořadí klauzulí v programu vzhledem k (a)
    a(1).
    b(1,1).                    % nenalezení odpovědi: nekonečný cyklus
```

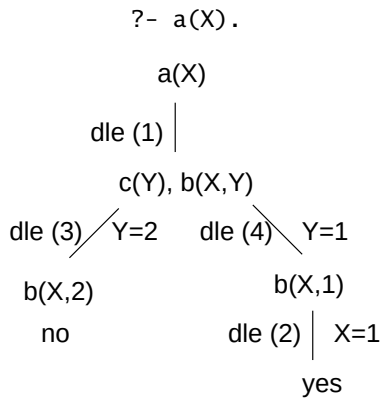
```
(c) a(X) :- b(X,Y), c(Y).                          ?- a(X).
    b(1,1).
    c(2).
    c(1).

(d) a(X) :- c(Y), b(X,Y).      % změněné pořadí cílů v těle klauzule vzhledem k (c)
    b(1,1).
    c(2).
    c(1).                      % náročnější nalezení první odpovědi než u (c)
```

V obou případech **stejný deklarativní ale odlišný procedurální význam**

Pořadí klauzulí a cílů II.

```
(1) a(X) :- c(Y), b(X,Y).
(2) b(1,1).
(3) c(2).
(4) c(1).
```



Vyzkoušejte si:

```
(1) a(X) :- b(X,X), c(X).
(3) a(X) :- b(Y,X), c(X).
(4) b(2,2).
(5) b(2,1).
(6) c(1).
```


Cvičení: průběh výpočtu

```
a :- b,c,d.
b :- e,c,f,g.
b :- g,h.
c.
d.
e :- i.
e :- h.
g.
h.
i.
```

Jak vypadá průběh výpočtu pro dotaz `?- a.`

Operátory, aritmetika

Operátory

- Infixová notace: `2*a + b*c`
- Prefixová notace: `+( *(2,a), *(b,c) )` priorita +: 500, priorita *: 400
  - prefixovou notaci lze získat predikátem display/1

    `:- display((a:-s(0),b,c)).` `:-(a, ,(s(0), ,(b,c)))`
- **Priorita operátorů**: operátor s **nejvyšší** prioritou je hlavní funktor
- Uživatelsky definované operátory: zna

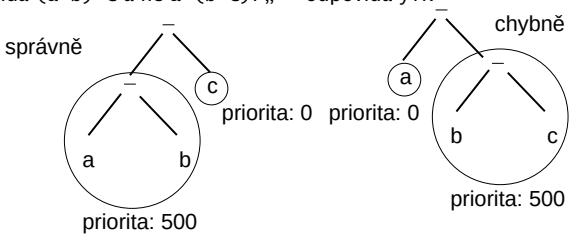
  `petr zna alese.` `zna( petr, alese).`
- Definice operátoru: `:- op( 600, xfx, zna ).` priorita: 1..1200
  - `:- op( 1100, xfy, ; ).` nestrukturované objekty: 0

    `:- op( 1000, xfy, , ).`

    `p :- q,r; s,t.` `p :- (q,r) ; (s,t).` ; má vyšší prioritu než ,
  - `:- op( 1200, xfx, :- ).` `:-` má nejvyšší prioritu
- Definice operátoru není spojena s datovými manipulacemi (kromě spec. případů)

Typy operátorů

- Typy operátorů
  - infixové operátory: `xfx, xfy, yfx` př. xfx = yfx -
  - prefixové operátory: `fx, fy` př. fx ?- fy -
  - postfixové operátory: `xf, yf`
- x a y určují **prioritu argumentu**
  - x reprezentuje argument, jehož priorita musí být **striktně menší** než u operátoru
  - y reprezentuje argument, jehož priorita je **menší nebo rovna** operátoru
  - a-b-c odpovídá (a-b)-c a ne a-(b-c): „-" odpovídá yfx



Aritmetika

- Předdefinované operátory

  `+, -, *, /, **` mocnina, `// celočíselné dělení`, `mod` zbytek po dělení
- `?- X = 1 + 2.` `X = 1 + 2` = odpovídá unifikaci
- `?- X is 1 + 2.`

  `X = 3` „`is`" **je speciální předdefinovaný operátor**, který vynutí evaluaci
  - porovnej: `N = (1+1+1+1+1)` `N is (1+1+1+1+1)`
  - pravá strana musí být vyhodnotitelný výraz (bez proměnné)
  - výraz na pravé straně je nejdříve aritmeticky vyhodnocen a pak unifikován s levou stranou

    volání `?- X is Y + 1.` způsobí chybu
- Další speciální předdefinované operátory

  `>, <, >=, =<, =:=` **aritmetická rovnost,** `=\=` **aritmetická nerovnost**
  - porovnej: `1+2 =:= 2+1` `1+2 = 2+1`
  - obě strany musí být vyhodnotitelný výraz: volání `?- 1 < A + 2.` způsobí chybu

Různé typy rovností a porovnání

`X = Y` X a Y jsou unifikovatelné

`X \= Y` X a Y nejsou unifikovatelné, (také `\+ X = Y`)

`X == Y` X a Y jsou identické

porovnej: ?- A == B. . . . no ?- A=B, A==B. . . . B = A yes

`X \== Y` X a Y nejsou identické

porovnej: ?- A \== B. . . . yes ?- A=B, A \== B. . . . A no

`X is Y` Y je aritmeticky vyhodnoceno a výsledek je přiřazen X

`X =:= Y` X a Y jsou si aritmeticky rovny

`X =\= Y` X a Y si aritmeticky nejsou rovny

`X < Y` aritmetická hodnota X je menší než Y (`=<`, `>`, `>=`)

`X @< Y` term X předchází term Y (`@=<`, `@>`, `@>=`)

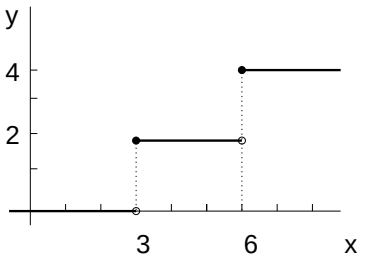
1. porovnání termů: podle alfabetického n. aritmetického uspořádání
2. porovnání struktur: podle arity, pak hlavního funktoru a pak zleva podle argumentů

?- f(pavel, g(b)) @< f(pavel, h(a)). . . . yes

Řez, negace

Řez a upnutí

```
f(X,0) :- X < 3, !.
f(X,2) :- 3 =< X, X < 6, !.
f(X,4) :- 6 =< X.
```



přidání **operátoru řezu** ,,!''

```
?- f(1,Y), Y>2.

f(X,0) :- X < 3, !.  %(1)
f(X,2) :- X < 6, !.  %(2)
f(X,4).

?- f(1,Y).
```

- Smazání řezu v (1) a (2) změní chování programu
- **Upnutí:** po splnění podcílů před řezem se už další klauzule neuvažují

Řez a ořezání

```
f(X,Y) :- s(X,Y).
s(X,Y) :- Y is X + 1.
s(X,Y) :- Y is X + 2.

?- f(1,Z).
Z = 2 ? ;
Z = 3 ? ;
no
```

```
f(X,Y) :- s(X,Y), !.
s(X,Y) :- Y is X + 1.
s(X,Y) :- Y is X + 2.

?-  f(1,Z).
Z = 2 ? ;
no
```

- **Ořezání:** po splnění podcílů před řezem se už neuvažuje další možné splnění těchto podcílů
- Smazání řezu změní chování programu

Chování operátoru řezu

- Předpokládejme, že klauzule `H :- T1, T2, ..., Tm, !, ...Tn.` je aktivována voláním cíle G, který je unifikovatelný s H. G=h(X,Y)
- V momentě, kdy je nalezen řez, existuje řešení cílů T1, ..., Tm X=1,Y=1
- **Ořezání:** při provádění řezu se už další možné splnění cílů T1, ..., Tm nehledá a všechny ostatní alternativy jsou odstraněny Y=2
- **Upnutí:** dále už nevyvolávám další klauzule, jejichž hlava je také unifikovatelná s G X=2

```
?- h(X,Y).

h(1,Y) :- t1(Y), !.
h(2,Y) :- a.

t1(1) :- b.
t1(2) :- c.
```

```
          h(X,Y)
  X=1   /    \  X=2
     t1(Y)     a   (vynechej: upnutí)
Y=1 /    \ Y=2
  b        c   (vynechej: ořezání)
/
```


Řez: návrat na rodiče

```
?- a(X).

(1) a(X) :- h(X,Y).
(2) a(X) :- d.

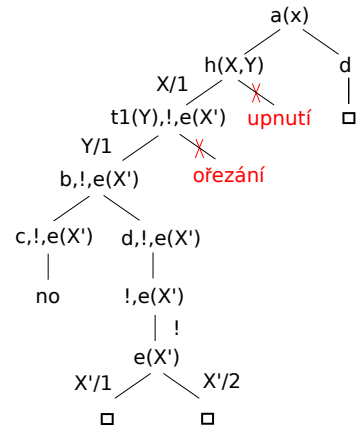
(3) h(1,Y) :- t1(Y), !, e(X).
(4) h(2,Y) :- a.

(5) t1(1) :- b.
(6) t1(2) :- c.

(7) b :- c.
(8) b :- d.

(9) d.

(10) e(1) .
(11) e(2).
```



- Po zpracování klauzule s řezem se vracím až na rodiče této klauzule, tj. a(X)

Řez: příklad

```
c(X) :- p(X).
c(X) :- v(X).

          p(1).  p(2).      v(2).

?- c(2).
true ? ;  %p(2)
true ? ;  %v(2)
no

?- c(X).
X = 1 ? ; %p(1)
X = 2 ? ; %p(2)
X = 2 ? ; %v(2)
no
```

```
c1(X) :- p(X), !.
c1(X) :- v(X).

?- c1(2).
true ?  ; %p(2)
no

?- c1(X).
X = 1 ?  ; %p(1)
no
```


Řez: cvičení

1. Porovnejte chování uvedených programů pro zadané dotazy.

```
a(X,X) :- b(X).
a(X,Y) :- Y is X+1.
b(X) :- X > 10.
```

```
a(X,X) :- b(X),!.
a(X,Y) :- Y is X+1.
b(X) :- X > 10.
```

```
a(X,X) :- b(X),c.
a(X,Y) :- Y is X+1.
b(X) :- X > 10.
c :- !.
```

```
?- a(X,Y).
?- a(1,Y).
?- a(11,Y).
```

2. Napište predikát pro výpočet maxima `max( X, Y, Max )`

Typy řezu

- Zlepšení efektivity programu: určíme, které alternativy nemá smysl zkoušet

  Poznámka: na vstupu pro X očekávám číslo

- **Zelený řez:** odstraní pouze neúspěšná odvození
  - `f(X,1) :- X >= 0, !.  f(X,-1) :- X < 0.`

    bez řezu zkouším pro nezáporná čísla 2. klauzuli
- **Modrý řez:** odstraní redundantní řešení
  - `f(X,1) :- X >= 0, !.  f(0,1). f(X,-1) :- X < 0.` bez řezu vrací f(0,1) 2x
- **Červený řez:** odstraní úspěšná řešení
  - `f(X,1) :- X >= 0, !.  f(_X,-1).` bez řezu uspěje 2. klauzule pro nezáporná čísla

Negace jako neúspěch

- **Speciální cíl pro nepravdu (neúspěch)** `fail` **a pravdu** `true`
- X a Y nejsou unifikovatelné: `different(X, Y)`
- ```
  different( X, Y ) :- X = Y, !, fail.
  different( _X, _Y ).
  ```
- X je muž: `muz(X)`

  ```
  muz( X ) :- zena( X ), !, fail.
  muz( _X ).
  ```


Negace jako neúspěch: operátor \+

- ```
  different(X,Y) :- X = Y, !, fail.
  different(_X,_Y).
  ```

  ```
  muz(X) :- zena(X), !, fail.
  muz(_X).
  ```
- Unární operátor \+ P
  - jestliže P uspěje, potom \+ P neuspěje

    `\+(P) :- P, !, fail.`
  - v opačném případě \+ P uspěje

    `\+(_).`
- `different( X, Y ) :- \+ X=Y.`
- `muz( X ) :- \+ zena( X ).`
- Pozor: takto definovaná negace \+P vyžaduje **konečné odvození** P

Negace a proměnné

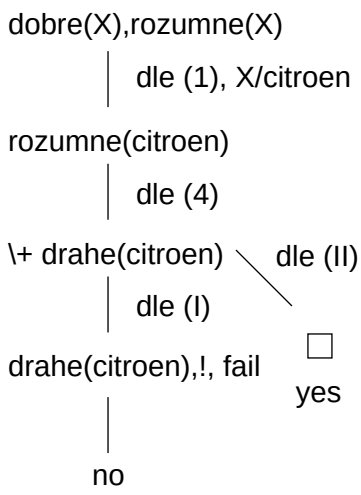
```
\+(P) :- P, !, fail. % (I)
\+(_).               % (II)

dobre( citroen ).          % (1)
dobre( bmw ).              % (2)

drahe( bmw ).              % (3)

rozumne( Auto ) :-         % (4)
   \+ drahe( Auto ).

?- dobre( X ), rozumne( X ).
```



Negace a proměnné

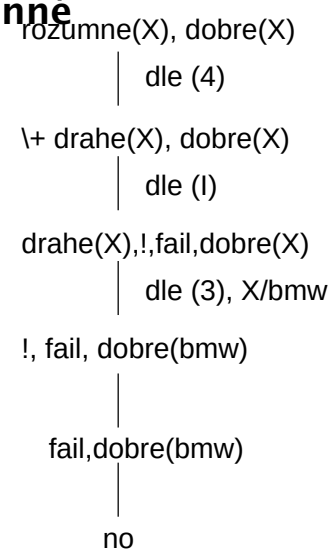
```
\+(P) :- P, !, fail. % (I)
\+(_).               % (II)

dobre( citroen ).          % (1)
dobre( bmw ).              % (2)

drahe( bmw ).              % (3)

rozumne( Auto ) :-         % (4)
   \+ drahe( Auto ).

?- rozumne( X ), dobre( X ).
```



Bezpečný cíl

- `?- \+ drahe( citroen ).` yes

  `?- \+ drahe( X ).` no
- `?- rozumne( citroen ).` yes

  `?- rozumne( X ).` no
- `\+ P` **je bezpečný: proměnné** `P` **jsou v okamžiku volání** `P` **instanciovány**
  - negaci používáme pouze pro bezpečný cíl P

Chování negace

- `?- \+ drahe( citroen ).` yes

  `?- \+ drahe( X ).` no
- `?- drahe( X ).`

  PTÁME SE: existuje X takové, že `drahe( X )` platí?
- `?- \+ drahe( X ).` `\+ drahe( X ) :- drahe(X),!,fail.` `\+ drahe( X ).`

  z definice `\+` plyne: není dokazatelné, že existuje X takové, že `drahe( X )` platí

  tj. **pro všechna** X platí `\+ drahe( X )`
- TEDY: pro cíle s negací neplatí **existuje** X takové, že `\+ drahe( X )`

⇒ **negace jako neúspěch není ekvivalentní negaci v matematické logice**

- Negace jako neúspěch používá **předpoklad uzavřeného světa**

  pravdivé je pouze to, co je dokazatelné

Predikáty na řízení běhu programu I.

- **řez „!"**
- `fail`: cíl, který vždy neuspěje `true`: cíl, který vždy uspěje
- `\+ P`: negace jako neúspěch

  ```
  \+ P :- P, !, fail; true.
  ```
- `once(P)`: vrátí pouze jedno řešení cíle P

  ```
  once(P) :- P, !.
  ```
- Vyjádření **podmínky:** `P -> Q ; R`
  - jestliže platí P tak Q `(P -> Q ; R) :- P, !, Q.`
  - v opačném případě R `(P -> Q ; R) :- R.`
  - příklad: `min(X,Y,Z) :- X =< Y -> Z = X ; Z = Y.`
- `P -> Q`
  - odpovídá: `(P -> Q; fail)`
  - příklad: `zaporne(X) :- number(X) -> X < 0.`

Predikáty na řízení běhu programu II.

- `call(P)`: zavolá cíl P a uspěje, pokud uspěje P
- nekonečná posloupnost backtrackovacích voleb: `repeat`

```
repeat.
repeat :- repeat.
```

klasické použití: **generuj akci X, proveď ji a otestuj, zda neskončit**

```
Hlava :- ...
         uloz_stav( StaryStav ),
         repeat,
           generuj( X ),        % deterministické: generuj, provadej, testuj
           provadej( X ),
           testuj( X ),
         !,
         obnov_stav( StaryStav ),
         ...
```


Seznamy

Reprezentace seznamu

- **Seznam**: `[a, b, c]`, prázdný seznam `[]`
- **Hlava (libovolný objekt), tělo (seznam)**: `.(Hlava, Telo)`
  - všechny strukturované objekty stromy – i seznamy
  - funktor ".", dva argumenty
  - `.(a, .(b, .(c, [])))` = `[a, b, c]`
  - notace: `[ Hlava | Telo ]` = `[a|Telo]`

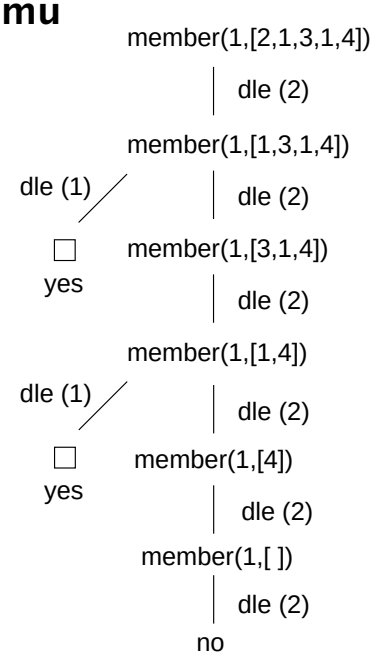
  `Telo` je v `[a|Telo]` seznam, tedy píšeme [a, b, c] = [a | [b, c]]
- Lze psát i: `[a,b|Telo]`
  - před "|" je libovolný počet prvků seznamu , za "|" je seznam zbývajících prvků
  - `[a,b,c]` = `[a|[b,c]]` = `[a,b|[c]]` = `[a,b,c|[]]`
  - pozor: `[ [a,b] | [c] ]` ≠ `[ a,b | [c] ]`
- Seznam jako **neúplná datová struktura:** `[a,b,c|T]`
  - `Seznam = [a,b,c|T], T = [d,e|S], Seznam = [a,b,c,d,e|S]`

Prvek seznamu

- `member( X, S )`
- platí: `member( b, [a,b,c] ).`
- neplatí: `member( b, [[a,b]|[c]] ).`
- X je prvek seznamu S, když
  - X je hlava seznamu S nebo

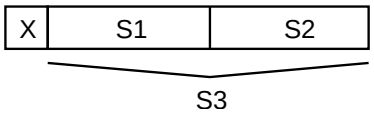
    `member( X, [ X | _ ] ).  %(1)`
  - X je prvek těla seznamu S

    ```
    member( X, [ _ | Telo ] ) :-
            member( X, Telo ).   %(2)
    ```
- Příklady použití:
  - `member(1,[2,1,3]).`
  - `member(X,[1,2,3]).`



Spojení seznamů

- append(L1, L2, L3)
- Platí: append([a,b], [c,d], [a,b,c,d])
- Neplatí: append([b,a], [c,d], [a,b,c,d]),
  append([a,[b]], [c,d], [a,b,c,d])
- Definice:
  - pokud je 1. argument prázdný seznam, pak 2. a 3. argument jsou stejné seznamy:
    append([], S, S).
  - pokud je 1. argument neprázdný seznam, pak má 3. argument stejnou hlavu jako 1.:
    append([X|S1], S2, [X|S3]) :- append(S1, S2, S3).



Cvičení: append/2

```
append( [], S, S ).     % (1)
append( [X|S1], S2, [X|S3] ) :- append( S1, S2, S3).   % (2)

:- append([1,2],[3,4],A).
        | (2)
        | A=[1|B]
        |
:- append([2],[3,4],B).
        | (2)
        | B=[2|C]  => A=[1,2|C]
        |
:- append([],[3,4],C).
        | (1)
        | C=[3,4]  => A=[1,2,3,4],
        |
       yes
```


Optimalizace posledního volání

- **Last Call Optimization (LCO)**
- Implementační technika snižující nároky na paměť
- Mnoho vnořených rekurzivních volání je náročné na paměť
- Použití LCO umožňuje vnořenou rekurzi s konstantními pamětovými nároky
- Typický příklad, kdy je možné použití LCO:
  - procedura musí mít pouze jedno rekurzivní volání: **v posledním cíli poslední klauzule**
  - cíle předcházející tomuto rekurzivnímu volání musí být **deterministické**
  - ```
    p( ... ) :- ...            % žádné rekurzivní volání v těle klauzule
    p( ... ) :- ...            % žádné rekurzivní volání v těle klauzule
    ...
    p(...) :- ..., !, p( ... ). % řez zajišťuje determinismus
    ```
- Tento typ **rekurze lze převést na iteraci**

LCO a akumulátor

- Reformulace rekurzivní procedury, aby umožnila LCO
- Výpočet délky seznamu length(Seznam, Delka)

```
length( [], 0 ).
length( [ H | T ], Delka ) :- length( T, Delka0 ), Delka is 1 + Delka0.
```

- Upravená procedura, tak aby umožnila LCO:

```
% length( Seznam, ZapocitanaDelka, CelkovaDelka ):
%          CelkovaDelka = ZapocitanaDelka + ,,počet prvků v Seznam''

length( Seznam, Delka ) :- length( Seznam, 0, Delka ). % pomocný predikát

length( [], Delka, Delka ).              % celková délka = započítaná délka
length( [ H | T ], A, Delka ) :- A0 is A + 1, length( T, A0, Delka ).
```

- Přídavný argument se nazývá **akumulátor**
```

max_list s akumulátorem

Výpočet největšího prvku v seznamu max_list(Seznam, Max)

```
max_list([X], X).

max_list([X|T], Max) :-
   max_list(T,MaxT),
   ( MaxT >= X, !, Max = MaxT
   ;
     Max = X ).
```

```
max_list([H|T],Max) :- max_list(T,H,Max).

max_list([], Max, Max).
max_list([H|T], CastecnyMax, Max) :-
   ( H > CastecnyMax, !,
     max_list(T, H, Max )
   ;
     max_list(T, CastecnyMax, Max) ).
```


Akumulátor jako seznam

- Nalezení seznamu, ve kterém jsou prvky v opačném pořadí
  reverse(Seznam, OpacnySeznam)
  - reverse([], []).
    reverse([H | T], Opacny) :-
    reverse(T, OpacnyT),
    append(OpacnyT, [H], Opacny).
  - naivní reverse s kvadratickou složitosti
- reverse pomocí akumulátoru s lineární složitostí
  - % reverse(Seznam, Akumulator, Opacny):
    % Opacny obdržíme přídáním prvků ze Seznam do Akumulator v opacnem poradi
    reverse(Seznam, OpacnySeznam) :- reverse(Seznam, [], OpacnySeznam).
    reverse([], S, S).
    reverse([H | T], A, Opacny) :-
    reverse(T, [H | A], Opacny). % přidání H do akumulátoru
  - zpětná konstrukce seznamu (srovnej s předchozí dopřednou konstrukcí, např. append)

reverse/2: cvičení

```
reverse( Seznam, OpacnySeznam ) :-          % (1)
         reverse( Seznam, [], OpacnySeznam).
reverse( [], S, S ).                        % (2)
reverse( [ H | T ], A, Opacny ) :-          % (3)
         reverse( T, [ H | A ], Opacny ).
```

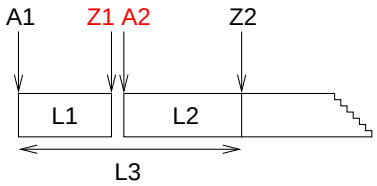
```
? - reverse([1,2,3],O).
reverse([1,2,3],O) → (1)
    reverse([1,2,3], [], O) → (3)
        reverse([2,3], [1], O) →  (3)
          reverse([3], [2,1], O) → (3)
             reverse([], [3,2,1], O) →  (2)
                 yes     O=[3,2,1]
```


Neefektivita při spojování seznamů

- Sjednocení dvou seznamů
- append([], S, S).
  append([X|S1], S2, [X|S3]) :- append(S1, S2, S3).
- ?- append([2,3], [1], S).
  postupné volání cílů:
  append([2,3], [1], S) → append([3], [1], S') → append([], [1], S'')
- Vždy je nutné projít celý první seznam

Rozdílové seznamy

- Zapamatování konce a připojení na konec: **rozdílové seznamy**
- `[a,b] = L1-L2 = [a,b|T]-T = [a,b,c|S]-[c|S] = [a,b,c]-[c]`
- Reprezentace prázdného seznamu: `L-L`




```
append( A1-Z1, Z1-Z2, A1-Z2 ).
        L1     L2      L3
      [2,3]    [1]     [2,3,1]
[2,3|Z1]-Z1 [1|Z2]-Z2  [2,3,1|Z2]-Z2
```

- `?- append( [2,3|Z1]-Z1, [1|Z2]-Z2, S ).`
  `S = A1 - Z2 = [2,3|Z1] - Z2 = [2,3| [1|Z2] ] - Z2`
  `Z1 = [1|Z2]  S = [2,3,1|Z2]-Z2`
- Jednotková složitost, oblíbená technika ale není tak flexibilní

Vestavěné predikáty

Akumulátor vs. rozdílové seznamy: `reverse`

```
reverse( [], [] ).
reverse( [ H | T ], Opacny ) :-
        reverse( T, OpacnyT ),
        append( OpacnyT, [ H ], Opacny ).                kvadratická složitost
```

```
reverse( Seznam, Opacny ) :- reverse0( Seznam, [], Opacny ).

reverse0( [], S, S ).
reverse0( [ H | T ], A, Opacny ) :-
         reverse0( T, [ H | A ], Opacny ).               akumulátor (lineární)
```

```
reverse( Seznam, Opacny ) :- reverse0( Seznam, Opacny-[]).

reverse0( [], S-S ).
reverse0( [ H | T ], Opacny-OpacnyKonec  ) :-                rozdílové seznamy
         reverse0( T, Opacny-[ H | OpacnyKonec] ).                (lineární)
```

Příklad: operace pro manipulaci s frontou

- test na prázdnost, přidání na konec, odebrání ze začátku

Vestavěné predikáty

- Predikáty pro řízení běhu programu
  - `fail`, `true`, ...
- Různé typy rovností
  - unifikace, aritmetická rovnost, ...
- Databázové operace
  - změna programu (programové databáze) za jeho běhu
- Vstup a výstup
- Všechna řešení programu
- Testování typu termu
  - proměnná?, konstanta?, struktura?, ...
- Konstrukce a dekompozice termu
  - argumenty?, funktor?, ...

Databázové operace

- Databáze: specifikace množiny relací
- Prologovský program: **programová databáze**, kde jsou relace specifikovány explicitně (fakty) i implicitně (pravidly)
- Vestavěné predikáty pro změnu databáze během provádění programu:

`assert( Klauzule )`	přidání `Klauzule` do programu
`asserta( Klauzule )`	přidání na začátek
`assertz( Klauzule )`	přidání na konec
`retract( Klauzule )`	smazání klauzule unifikovatelné s `Klauzule`

- Pozor: nadměrné použití těchto operací snižuje srozumitelnost programu

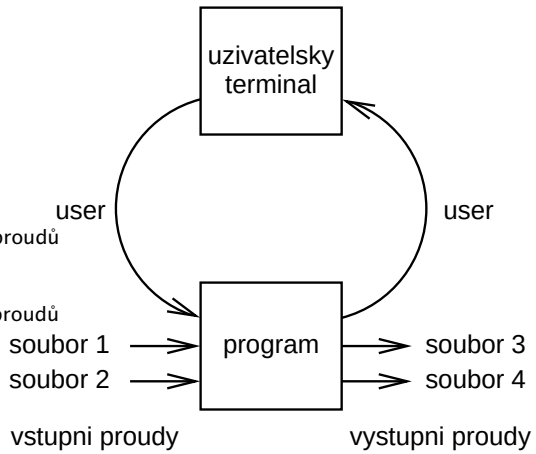
Příklad: databázové operace

- ***Caching***: odpovědi na dotazy jsou přidány do programové databáze
  - `?- solve( problem, Solution), asserta( solve( problem, Solution) ).`
  - `:- dynamic solve/2.` % nezbytné při použití v SICStus Prologu
- Příklad:

```
uloz_trojice( Seznam1, Seznam2 ) :-
        member( X1, Seznam1 ),
        member( X2, Seznam2 ),
        spocitej_treti( X1, X2, X3 ),
        assertz( trojice( X1, X2, X3 ) ),
        fail.
uloz_trojice( _, _ ) :- !.
```


Vstup a výstup

- program může číst data ze **vstupního proudu** (*input stream*)
- program může zapisovat data do **výstupního proudu** (*output stream*)
- dva **aktivní proudy**
  - aktivní vstupní proud
  - aktivní výstupní proud
- **uživatelský terminál** – `user`
  - datový vstup z terminálu chápán jako jeden ze vstupních proudů
  - datový výstup na terminál chápán jako jeden z výstupních proudů



Vstupní a výstupní proudy: vestavěné predikáty

- změna (**otevření**) aktivního vstupního/výstupního proudu: `see(S)/tell(S)`

```
cteni( Soubor ) :- see( Soubor ),
                   cteni_ze_souboru( Informace ),
                   see( user ).
```

- **uzavření** aktivního vstupního/výstupního proudu: `seen/told`
- **zjištění** aktivního vstupního/výstupního proudu: `seeing(S)/telling(S)`

```
cteni( Soubor ) :- seeing( StarySoubor ),
                   see( Soubor ),
                   cteni_ze_souboru( Informace ),
                   seen,
                   see( StarySoubor ).
```

Sekvenční přístup k textovým souborům

- **čtení** dalšího **termu**: `read(Term)`
  - při čtení jsou termy odděleny tečkou

```
| ?- read(A), read( ahoj(B) ), read( [C,D] ).
|: ahoj. ahoj( petre ). [ ahoj( 'Petre!' ), jdeme ].
A = ahoj, B = petre, C = ahoj('Petre!'), D = jdeme
```

  - po dosažení konce souboru je vrácen atom `end_of_file`
- **zápis** dalšího **termu**: `write(Term)`

```
?- write( ahoj ).    ?- write( 'Ahoj Petre!' ).
```

nový řádek na výstup: `nl`

N mezer na výstup: `tab(N)`

- **čtení/zápis** dalšího **znaku**: `get0(Znak)`, `get(NeprazdnyZnak)/put(Znak)`
  - po dosažení konce souboru je vrácena `-1`

Příklad čtení ze souboru

```
process_file( Soubor ) :-
       seeing( StarySoubor ),       % zjištění aktivního proudu
       see( Soubor ),               % otevření souboru  Soubor
       repeat,
          read( Term ),             % čtení termu  Term
          process_term( Term ),     % manipulace s termem
          Term == end_of_file,      % je konec souboru?
       !,
       seen,                        % uzavření souboru
       see( StarySoubor ).          % aktivace původního proudu

repeat.                             % opakování
repeat :- repeat.
```


Čtení programu ze souboru

- **Interpretování** kódu programu
  - `?- consult(program).`
  - `?- consult('program.pl').`
  - `?- consult( [program1, 'program2.pl'] ).`
- **Kompilace** kódu programu
  - ?- compile([program1, 'program2.pl']).
  - ?- [program].
  - ?- [user]. **zadávání kódu ze vstupu** ukončené CTRL+D
  - další varianty podobně jako u interpretování
  - typické zrychlení: 5 až 10 krát

Všechna řešení

- Backtracking vrací pouze jedno řešení po druhém
- Všechna řešení dostupná najednou: `bagof/3`, `setof/3`, `findall/3`
- `bagof( X, P, S )`: vrátí seznam S, všech objektů X takových, že P je splněno

```
vek( petr, 7 ).
vek( anna, 5 ).
vek( tomas, 5 ).

?- bagof( Dite, vek( Dite, 5 ), Seznam ).
   Seznam = [ anna, tomas ]
```

- Volné proměnné v cíli P jsou **všeobecně kvantifikovány**

```
?- bagof( Dite, vek( Dite, Vek ), Seznam ).
   Vek = 7, Seznam = [ petr ];
   Vek = 5, Seznam = [ anna, tomas ]
```

Všechna řešení II.

- Pokud neexistuje řešení bagof(X,P,S) neuspěje
- bagof: pokud nějaké řešení existuje několikrát, pak S obsahuje duplicity
- bagof, setof, findall:
  P je libovolný cíl

```
vek( petr, 7 ).
vek( anna, 5 ).
vek( tomas, 5 ).

?- bagof( Dite, ( vek( Dite, 5 ), Dite \= anna  ), Seznam ).
   Seznam = [ tomas ]
```

- bagof, setof, findall:
  na objekty shromažďované v X nejsou žádná omezení: X je term

```
?- bagof( Dite-Vek, vek( Dite, Vek ), Seznam ).
   Seznam = [petr-7,anna-5,tomas-5]
```


Existenční kvantifikátor „^ ”

- Přidání **existenčního kvantifikátoru** „^ ” ⇒ hodnota proměnné nemá význam

```
?- bagof( Dite, Vek^vek( Dite, Vek ), Seznam ).
   Seznam = [petr,anna,tomas]
```

- Anonymní proměnné jsou všeobecně kvantifikovány,
  i když jejich hodnota není (jako vždy) vracena na výstup

```
?- bagof( Dite, vek( Dite, _Vek ), Seznam ).
   Seznam = [petr] ;
   Seznam = [anna,tomas]
```

- Před operátorem „^ ” může být i seznam

```
?- bagof( Vek ,[Jmeno,Prijmeni]^vek( Jmeno, Prijmeni, Vek ), Seznam ).
   Seznam = [7,5,5]
```


Všechna řešení III.

- setof(X, P, S): rozdíly od bagof
  - S je uspořádaný podle @<
  - případné duplicity v S jsou eliminovány
- findall(X, P, S): rozdíly od bagof
  - všechny proměnné jsou existenčně kvantifikovány
    ?- findall(Dite, vek(Dite, Vek), Seznam).
    ⇒ v S jsou shromažďovány všechny možnosti i pro různá řešení
    ⇒ findall uspěje přesně jednou
  - výsledný seznam může být prázdný ⇒ pokud neexistuje řešení, uspěje a vrátí S = []
  - ?- bagof(Dite, vek(Dite, Vek), Seznam).
    Vek = 7, Seznam = [petr];
    Vek = 5, Seznam = [anna, tomas]
    ?- findall(Dite, vek(Dite, Vek), Seznam).
    Seznam = [petr,anna,tomas]

Testování typu termu

var(X)	X je volná proměnná
nonvar(X)	X není proměnná
atom(X)	X je atom (pavel, 'Pavel Novák', <-->)
integer(X)	X je integer
float(X)	X je float
atomic(X)	X je atom nebo číslo
compound(X)	X je struktura

Určení počtu výskytů prvku v seznamu

```
count( X, S, N ) :- count( X, S, 0, N ).

count( _, [], N, N ).
count( X, [X|S], N0, N) :- !, N1 is N0 + 1, count( X, S, N1, N).
count( X, [_|S], N0, N) :- count( X, S, N0, N).

:-? count( a, [a,b,a,a], N )      :-? count( a, [a,b,X,Y], N).
N=3                               N=3

count( _, [], N, N ).
count( X, [Y|S], N0, N ) :- nonvar(Y), X = Y, !,
                            N1 is N0 + 1, count( X, S, N1, N ).
count( X, [_|S], N0, N ) :- count( X, S, N0, N ).
```


Konstrukce a dekompozice atomu

- **Atom** (opakování)
  - řetězce písmen, čísel, „_" začínající malým písmenem: `pavel, pavel_novak, x2, x4_34`
  - řetězce speciálních znaků: `+, <->, ===>`
  - řetězce **v apostrofech**: `'Pavel', 'Pavel Novák', 'prší', 'ano'`

    `?- 'ano'=A.  A = ano`
- **Řetězec znaků v uvozovkách**
  - př. "ano", "Pavel"

    `?- A="Pavel".`
    `A = [80,97,118,101,108]`

    `?- A="ano".`
    `A=[97,110,111]`
  - př. použití: konstrukce a dekompozice atomu na znaky, vstup a výstup do souboru
- **Konstrukce atomu ze znaků, rozložení atomu na znaky**

  `name( Atom, SeznamASCIIKodu )` `name( ano, [97,110,111] )` `name( ano, "ano" )`

Konstrukce a dekompozice termu

- Konstrukce a dekompozice termu

  `Term =.. [ Funktor | SeznamArgumentu ]`

  `a(9,e) =.. [a,9,e]`
  `Cil =.. [ Funktor | SeznamArgumentu ], call( Cil )`
  `atom =.. X ⇒ X = [atom]`
- Pokud chci znát pouze funktor nebo některé argumenty, pak je efektivnější:

  `functor( Term, Funktor, Arita )` `functor( a(9,e), a, 2 )` `functor(atom,atom,0)` `functor(1,1,0)`

  `arg( N, Term, Argument )` `arg( 2, a(9,e), e)`

Rekurzivní rozklad termu

- Term je proměnná (`var/1`), atom nebo číslo (`atomic/1`) ⇒ konec rozkladu
- Term je seznam (`[_|_]`) ⇒ procházení seznamu a rozklad každého prvku seznamu [] ... řešen výše jako `atomic`
- Term je složený (`=../2, functor/3`) ⇒ procházení seznamu argumentů a rozklad každého argumentu
- Příklad: ground/1 uspěje, pokud v termu nejsou proměnné; jinak neuspěje

```
ground(Term) :- atomic(Term), !.
ground(Term) :- var(Term), !, fail.
ground([H|T]) :- !, ground(H), ground(T).
ground(Term) :- Term =.. [ _Funktor | Argumenty ],
                ground( Argumenty ).
```

```
?- ground(s(2,[a(1,3),b,c],X)).      ?- ground(s(2,[a(1,3),b,c])).
no                                   yes
```

Příklad: dekompozice termu I.

- `count_term( Integer, Term, N )` určí počet výskytů celého čísla v termu
  - `?- count_term( 1, a(1,2,b(x,z(a,b,1)),Y), N ).` N=2
  - `count_term( X, T, N ) :- count_term( X, T, 0, N).`

```
count_term( X, T, N0, N ) :- integer(T), X = T, !, N is N0 + 1.
count_term( _, T, N, N ) :- atomic(T), !.
count_term( _, T, N, N ) :- var(T), !.
count_term( X, T, N0, N ) :- T =.. [ _ | Argumenty ],
                             count_arg( X, Argumenty, N0, N ).
count_arg( _, [], N, N ).
count_arg( X, [ H | T ], N0, N ) :- count_term( X, H, 0, N1),
                                    N2 is N0 + N1,
                                    count_arg( X, T, N2, N ).
```

  - `?- count_term( 1, [a,2,[b,c],[d,[e,f],Y]], N ).`

```
count_term( X, T, N0, N ) :- T = [_|_], !, count_arg( X, T, N0, N ).
```

klauzuli přidáme **před** poslední klauzuli count_term/4

Technika a styl programování v Prologu

Cvičení: dekompozice termu

- Napište predikát `substitute( Podterm, Term, Podterm1, Term1)`, který nahradí všechny výskyty `Podterm` v `Term` termem `Podterm1` a výsledek vrátí v `Term1`
- Předpokládejte, že `Term` a `Podterm` jsou termy bez proměnných
- `?- substitute( sin(x), 2*sin(x)*f(sin(x)), t, F ).` F=2*t*f(t)

Technika a styl programování v Prologu

- Styl programování v Prologu
  - některá pravidla správného stylu
  - správný vs. špatný styl
  - komentáře
- Ladění
- Efektivita

Styl programování v Prologu I.

- Cílem stylistických konvencí je
  - redukce nebezpečí programovacích chyb
  - psaní čitelných a srozumitelných programů, které se dobře ladí a modifikují
- Některá pravidla správného stylu
  - krátké klauzule
  - krátké procedury; dlouhé procedury pouze s uniformní strukturou (tabulka)
  - klauzule se základními (hraničními) případy psát před rekurzivními klauzulemi
  - vhodná jmena procedur a proměnných
    - nepoužívat seznamy (`[...]`) nebo závorky (`{...}`, `(...)`) pro termy pevné arity
  - vstupní argumenty psát před výstupními
  - **struktura programu** – **jednotné konvence** v rámci celého programu, např.
    - mezery, prázdné řádky, odsazení
    - klauzule stejné procedury na jednom místě; prázdné řádky mezi klauzulemi; každý cíl na zvláštním řádku

Správný styl programování

- konstrukce setříděného seznamu Seznam3 ze setříděných seznamů Seznam1, Seznam2: merge(Seznam1, Seznam2, Seznam3)
- merge([2,4,7], [1,3,4,8], [1,2,3,4,4,7,8])
- ```
  merge( [], Seznam, Seznam ) :-
        !.                                  % prevence redundantních řešení

  merge( Seznam, [], Seznam ).

  merge( [X|Telo1], [Y|Telo2], [X|Telo3] ) :-
        X < Y, !,
        merge( Telo1, [Y|Telo2], Telo3 ).

  merge( Seznam1, [Y|Telo2], [Y|Telo3] ) :-
        merge( Seznam1, Telo2, Telo3 ).
  ```


Špatný styl programování

```
merge( S1, S2, S3 ) :-
 S1 = [], !, S3 = S2;          %  první seznam je prázdný
 S2 = [], !, S3 = S1;          %  druhý seznam je prázdný
 S1 = [X|T1],
 S2 = [Y|T2],
 ( X < Y, !,
   Z = X,                      %  Z je hlava seznamu  S3
   merge( T1, S2, T3 );
   Z = Y,
   merge( S1, T2, T3) ),
 S3 = [ Z | T3 ].
```


Styl programování v Prologu II.

- **Středník** „;" může způsobit nesrozumitelnost klauzule
  - nedávat středník na konec řádku, používat závorky
  - v některých případech: rozdělení klauzle se středníkem do více klauzulí
- Opatrné používání **operátoru řezu**
  - preferovat použití zeleného řezu (nemění deklarativní sémantiku)
  - červený řez používat v jasně definovaných konstruktech

    negace: `P, !, fail; true` `\+ P`

    alternativy: `Podminka, !, Cil1 ; Cil2` `Podminka -> Cil1 ; Cil2`
- Opatrné používání **negace** „\+"
  - negace jako neúspěch: negace není ekvivalentní negaci v matematické logice
- Pozor na **`assert` a `retract`**: snižuji transparentnost chování programu
```

Dokumentace a komentáře

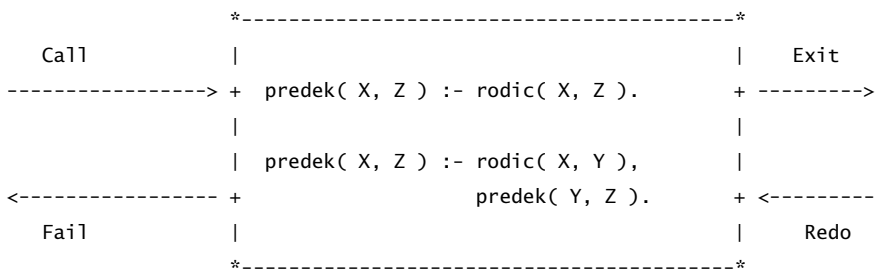
- co program dělá, jak ho používat (jaký cíl spustit a jaké jsou očekávané výsledky), příklad použití
- které predikáty jsou hlavní (*top-level*)
- jak jsou hlavní koncepty (objekty) reprezentovány
- doba výpočtu a paměťové nároky
- jaké jsou limitace programu
- zda jsou použity nějaké speciální rysy závislé na systému
- jaký je význam predikátů v programu, jaké jsou jejich argumenty, které jsou vstupní a které výstupní (pokud víme)
  - vstupní argumenty „+", výstupní „-" `merge( +Seznam1, +Seznam2, -Seznam3 )`
  - `JmenoPredikatu/Arita` `merge/3`
- algoritmické a implementační podrobnosti

Ladění

- Přepínače na trasování: `trace/0`, `notrace/0`
- Trasování specifického predikátu: `spy/1`, `nospy/1`
  - `spy( merge/3 )`
- debug/0, nodebug/0: pro trasování pouze predikátů zadaných spy/1
- Libovolná část programu může být spuštěna zadáním vhodného dotazu: **trasování cíle**
  - vstupní informace: jméno predikátu, hodnoty argumentů při volání
  - výstupní informace
    - při úspěchu hodnoty argumentů splňující cíl
    - při neúspěchu indikace chyby
  - nové vyvolání přes ";": stejný cíl je volán při backtrackingu

Krabičkový (4-branový) model

- Vizualizace řídícího toku (backtrackingu) na úrovni predikátu
  - `Call`: volání cíle
  - `Exit`: úspěšné ukončení volání cíle
  - `Fail`: volání cíle neuspělo
  - Redo: jeden z následujících cílů neuspěl a systém backtrackuje, aby nalezl alternativy k předchozímu řešení



Příklad: trasování

```
a(X) :- nonvar(X).
a(X) :- c(X).
a(X) :- d(X).
c(1).
d(2).
```



```
| ?-  a(X).
        1      1 Call: a(_463) ?
        2      2 Call: nonvar(_463) ?
        2      2 Fail: nonvar(_463) ?
        3      2 Call: c(_463) ?
        3      2 Exit: c(1) ?
?       1      1 Exit: a(1) ?
X = 1 ? ;
        1      1 Redo: a(1) ?
        4      2 Call: d(_463) ?
        4      2 Exit: d(2) ?
        1      1 Exit: a(2) ?
X = 2 ? ;
no
% trace
| ?-
```

Efektivita

- Čas výpočtu, paměťové nároky, a také časové nároky na vývoj programu
  - u Prologu můžeme častěji narazit na problémy s časem výpočtu a pamětí
  - Prologovské aplikace redukují čas na vývoj
  - vhodnost pro symbolické, nenumerické výpočty se strukturovanými objekty a relacemi mezi nimi
- Pro zvýšení efektivity je nutno se zabývat **procedurálními aspekty**
  - **zlepšení efektivity při prohledávání**
    - odstranění zbytečného backtrackingu
    - zrušení provádění zbytečných alternativ co nejdříve
  - návrh **vhodnějších datových struktur**, které umožní efektivnější operace s objekty

Zlepšení efektivity: základní techniky

- **Optimalizace posledního volání (LCO) a akumulátory**
- **Rozdílové seznamy** při spojování seznamů
- **Caching**: uložení vypočítaných výsledků do programové databáze
- **Indexace** podle prvního argumentu
  - např. v SICStus Prologu
  - při volání predikátu s prvním nainstaniovaným argumentem se používá hašovací tabulka zpřístupňující pouze odpovídající klauzule
  - `zamestnanec( Prijmeni, KrestniJmeno, Oddeleni, ...)`
  - `seznamy( [], ...) :- ... .`

    `seznamy( [H|T], ...) :- ... .`
- **Determinismus**:
  - rozhodnout, které klauzule mají uspět vícekrát, ověřit požadovaný determinismus

Rezoluce v predikátové logice 1.řádu

Rezoluce

- rezoluční princip: z $F \vee A$, $G \vee \neg A$ odvodit $F \vee G$
- dokazovací metoda používaná
  - v Prologu
  - ve většině systémů pro automatické dokazování
- procedura pro **vyvrácení**
  - hledáme důkaz pro negaci formule
  - snažíme se dokázat, že negace formule je nesplnitelná
    $\Longrightarrow$ formule je vždy pravdivá

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
    - $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
  - **formule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ všechny klauzule jsou pravdivé
  - prázdná formule je vždy pravdivá (neexistuje klauzule, která by byla nepravdivá)
- **množinová notace:** literál je prvek klauzule, klauzule je prvek formule, ...

Splnitelnost

- **[Opakování:]** Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a, b) = f(b, a)\}, \{f(f(a, a), b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := " + "$
- Formule je **splnitelná**, existuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - formule je konjunkce klauzulí, tj. všechny klauzule musí být v dané interpretaci pravdivé
  - příklad (pokrač.): F je splnitelná (je pravdivá v $\mathcal{I}_1$)
- Formule je **nesplnitelná**, neexistuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - tj. formule je ve všech iterpretacích nepravdivá
  - tj. neexistuje interpretace, ve které by byly všechny klauzule pravdivé
  - příklad: $G = \{\{p(b)\}, \{p(a)\}, \{\neg p(a)\}\}$ je nesplnitelná
    ($\{p(a)\}$ a $\{\neg p(a)\}$ nemohou být zároveň pravdivé)

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí
- příklad:

$$\frac{\{p, r\} \qquad \{\neg r, s\}}{\{p, s\}} \qquad \frac{(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)}{p \vee s}$$

obě klauzule $(p \vee r)$ a $(\neg r \vee s)$ musí být pravdivé
protože r nestačí k pravdivosti obou klauzulí,
musí být pravdivé p (pokud je pravdivé $\neg r$) nebo s (pokud je pravdivé r),
tedy platí klauzule $p \vee s$

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule** C **z formule** F je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F
  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F
  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2
  $C_4 = \{\neg q\}$ klauzule z F
  $C_5 = \{p\} = C$ rezolventa C_3 a C_4

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti** $\neg F$
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli** $\square$
- Příklad:

  $F \ldots \neg a \vee a$

  $G = \neg F \ldots a \wedge \neg a$

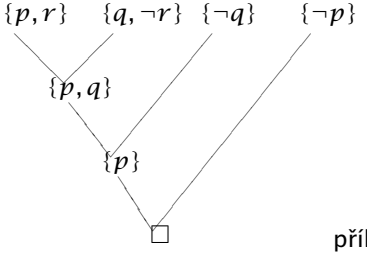
  $G = \neg F \ldots \{\{a\}, \{\neg a\}\}$

  $C_1 = \{a\}, C_2 = \{\neg a\}$

  rezolventa C_1 a C_2 je $\square$, tj. F je vždy pravdivá
- rezoluční důkaz $\square$ z formule G se nazývá **rezoluční vyvrácení formule** G
  - a tedy G je nepravdivá ve všech interpretacích, tj. G je nesplnitelná

Strom rezolučního důkazu

- **strom rezolučního důkazu** klauzule C z formule G je binární strom:
  - kořen je označen klauzulí C,
  - listy jsou označeny klauzulemi z G a
  - každý uzel, který není listem,
    - má bezprostředními potomky označené klauzulemi C_1 a C_2
    - je označen rezolventou klauzulí C_1 a C_2
- příklad: $G = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p\}\}$ $C = \square$



strom rezolučního vyvrácení
(rezoluční důkaz $\square$ z G)

příklad: $\{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$

Substituce

- **co s proměnnými? vhodná substituce a unifikace**
  - $f(X, a, g(Y)) < 1, f(h(c), a, Z) < 1, \quad X = h(c), Z = g(Y) \Longrightarrow f(h(c), a, g(Y)) < 1$
- **substituce** je libovolná funkce θ zobrazující výrazy do výrazů tak, že platí
  - $\theta(E) = E$ pro libovolnou konstantu E
  - $\theta(f(E_1, \cdots, E_n)) = f(\theta(E_1), \cdots, \theta(E_n))$ pro libovolný funkční symbol f
  - $\theta(p(E_1, \cdots, E_n)) = p(\theta(E_1), \cdots, \theta(E_n))$ pro libovolný predik. symbol p
- **substituce** je tedy homomorfismus výrazů, který **zachová vše kromě proměnných** – ty lze nahradit čímkoliv
- substituce zapisujeme zpravidla ve tvaru seznamu $[X_1/\xi_1, \cdots, X_n/\xi_n]$ kde X_i jsou proměnné a ξ_i substituované termy
  - příklad: $p(X)[X/f(a)] \equiv p(f(a))$
- **přejmenování proměnných**: speciální náhrada proměnných proměnnými
  - příklad: $p(X)[X/Y] \equiv p(Y)$

Unifikace

- Ztotožnění dvou literálů p, q pomocí vhodné substituce σ takové, že $p\sigma = q\sigma$ nazýváme **unifikací** a příslušnou substituci **unifikátorem**.
- **Unifikátorem** množiny S literálů nazýváme substituce θ takovou, že množina

$$S\theta = \{t\theta | t \in S\}$$

  má jediný prvek.
  - příklad: S = { datum(D1, M1, 2003), datum(1, M2, Y2) }
    unifikátor θ = [D1/1, M1/2, M2/2, Y2/2003] $S\theta$ = { datum(1, 2, 2003) }
- Unifikátor σ množiny S nazýváme **nejobecnějším unifikátorem** (**mgu** – ***most general unifier***), jestliže pro libovolný unifikátor θ existuje substituce λ taková, že $\theta = \sigma\lambda$.
  - příklad (pokrač.): nejobecnější unifikátor σ = [D1/1, Y2/2003, M1/M2], λ=[M2/2]

Rezoluční princip v PL1

- základ:
  - rezoluční princip ve výrokové logice $\dfrac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$
  - substituce, unifikátor, nejobecnější unifikátor
- **rezoluční princip v PL1** je pravidlo, které
  - připraví příležitost pro uplatnění vlastního rezolučního pravidla nalezením vhodného unifikátoru
  - provede rezoluci a získá rezolventu

$$\frac{C_1 \cup \{A\} \qquad \{\neg B\} \cup C_2}{C_1\rho\sigma \cup C_2\sigma}$$

  - kde ρ **je přejmenováním proměnných** takové, že klauzule $(C_1 \cup A)\rho$ a $\{B\} \cup C_2$ nemají společné proměnné
  - σ **je nejobecnější unifikátor** klauzulí $A\rho$ a B

Příklad: rezoluce v PL1

- příklad: $C_1 = \{p(X,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- přejmenování proměnných: $\rho = [X/Z]$

  $C_1 = \{p(Z,Y), \quad q(Y)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- nejobecnější unifikátor: $\sigma = [Y/a]$

  $C_1 = \{p(Z,a), \quad q(a)\} \qquad C_2 = \{\neg q(a), \quad s(X,W)\}$
- rezoluční princip: $C = \{p(Z,a), \quad s(X,W)\}$
- vyzkoušejte si:

  $C_1 = \{q(X), \quad \neg r(Y), \quad p(X,Y), \quad p(f(Z), f(Z))\}$

  $C_2 = \{n(Y), \quad \neg r(W), \quad \neg p(f(W), f(W)\}$

Rezoluce v PL1

- **Obecný rezoluční princip v PL1**

$$\frac{C_1 \cup \{A_1, \cdots, A_m\} \qquad \{\neg B_1, \cdots, \neg B_n\} \cup C_2}{C_1\rho\sigma \cup C_2\sigma}$$

  - kde ρ je přejmenováním proměnných takové, že množiny klauzulí $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, C_1\rho\}$ a $\{B_1, \cdots, B_n, C_2\}$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor množiny $\{A_1\rho, \cdots, A_m\rho, B_1, \cdots, B_n\}$
  - příklad: $A_1 = a(X)$ vs. $\{\neg B_1, \neg B_2\} = \{\neg a(b), \neg a(Z)\}$

    v jednom kroku potřebuji vyrezolvovat zároveň B_1 i B_2
- Rezoluce v PL1
  - **korektní**: jestliže existuje rezoluční vyvrácení F, pak F je nesplnitelná
  - **úplná**: jestliže F je nesplnitelná, pak existuje rezoluční vyvrácení F

Zefektivnění rezoluce

- rezoluce je intuitivně efektivnější než axiomatické systémy
  - axiomatické systémy: který z axiomů a pravidel použít?
  - rezoluce: pouze jedno pravidlo
- stále ale příliš mnoho možností, jak hledat důkaz v prohledávacím prostoru
- problém SAT= $\{S | S$ je splnitelná $\}$ NP úplný,
  nicméně: menší prohledávací prostor vede k rychlejšímu nalezení řešení
- strategie pro zefektivnění prohledávání ⇒ varianty rezoluční metody
- vylepšení prohledávání
  - zastavit prohledávání cest, které nejsou slibné
  - specifikace pořadí, jak procházíme alternativními cestami

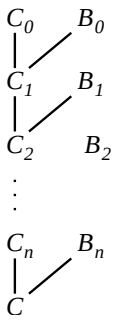
Varianty rezoluční metody

- **Věta:** Každé omezení rezoluce je korektní.
  - stále víme, že to, co jsme dokázali, platí
- T-**rezoluce**: klauzule učastnící se rezoluce nejsou tautologie úplná
  - tautologie nepomůže ukázat, že formule je nesplnitelná
- **sémantická rezoluce**: úplná
  zvolíme libovolnou interpretaci a pro rezoluci používáme jen takové klauzule, z nichž alespoň jedna je v této interpretaci nepravdivá
  - pokud jsou obě klauzule pravdivé, těžko odvodíme nesplnitelnost formule
- **vstupní (*input*) rezoluce:** neúplná
  alespoň jedna z klauzulí, použitá při rezoluci, je z výchozí **vstupní množiny** S
  - $\{\{p,q\},\ \{\neg p,q\},\ \{p,\neg q\},\ \{\neg p,\neg q\}\}$
    existuje rezoluční vyvrácení
    neexistuje rezoluční vyvrácení pomocí vstupní rezoluce

Rezoluce a logické programování

Lineární rezoluce

- varianta rezoluční metody
  - snaha o generování lineární posloupnosti místo stromu
  - v každém kroku kromě prvního můžeme použít bezprostředně předcházející rezolventu a k tomu buď některou z klauzulí vstupní množiny S
    nebo některou z předcházejících rezolvent
- **lineární rezoluční důkaz** C **z** S je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0\rangle, \ldots \langle C_n, B_n\rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - C_0 a každá B_i jsou prvky S nebo některé $C_j, j < i$
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i
- **lineární vyvrácení** S = lineární rezoluční důkaz $\square$ z S

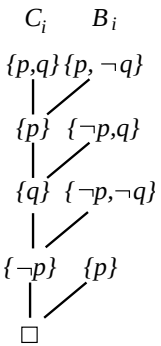


Lineární rezoluce II.

- příklad: $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

  $A_1 = \{p, q\}$
  $A_2 = \{p, \neg q\}$
  $A_3 = \{\neg p, q\}$
  $A_4 = \{\neg p, \neg q\}$

- S: **vstupní množina** klauzulí
- C_i: **střední klauzule**
- B_i: **boční klauzule**



Prologovská notace

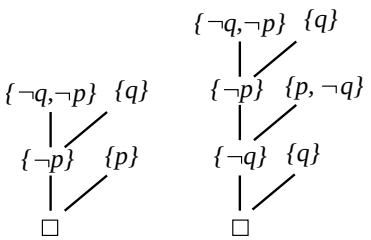
- Klauzule v matematické logice
  - $\{H_1, \cdots, H_m, \neg T_1, \cdots, \neg T_n\}$ $\quad H_1 \vee \cdots \vee H_m \vee \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$
- **Hornova klauzule**: nejvýše jeden pozitivní literál
  - $\{H, \neg T_1, \ldots, \neg T_n\}$ $\quad \{H\}$ $\quad \{\neg T_1, \ldots, \neg T_n\}$
  - $H \vee \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$ $\quad H$ $\quad \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$
- **Pravidlo**: jeden pozitivní a alespoň jeden negativní literál
  - Prolog: $H :- T_1, \cdots, T_n.$ Matematická logika: $H \Leftarrow T_1 \wedge \cdots \wedge T_n$
  - $H \Leftarrow T$ $\quad H \vee \neg T$ $\quad H \vee \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$ $\quad$ Klauzule: $\{H, \neg T_1, \ldots, \neg T_n\}$
- **Fakt**: pouze jeden pozitivní literál
  - Prolog: $H.$ Matematická logika: H Klauzule: $\{H\}$
- **Cílová klauzule**: žádný pozitivní literál
  - Prolog: $:- T_1, \ldots T_n.$ Matematická logika: $\neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$ Klauzule: $\{\neg T_1, \cdots \neg T_n\}$

Logický program

- **Programová klauzule**: právě jeden pozitivní literál (fakt nebo pravidlo)
- **Logický program**: konečná množina programových klauzulí
- Příklad:
  - logický program jako množina klauzulí:
    $P = \{P_1, P_2, P_3\}$
    $P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
  - logický program v prologovské notaci:
    $p.$
    $p :- q.$
    $q.$
  - cílová klauzule: $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\quad :- q, p.$

Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí P
- $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\quad P = \{P_1, P_2, P_3\}:$ $\quad P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
- $:- q, p.$ $\qquad p.$ $\qquad p :- q,$ $\qquad q.$



- **Střední klauzule jsou cílové klauzule**

Lineární vstupní rezoluce

- **Vstupní rezoluce na** $P \cup \{G\}$
  - (opakování:) alespoň jedna z klauzulí použitá při rezoluci je z výchozí vstupní množiny
  - začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
  - boční klauzule jsou vždy z P (tj. jsou to programové klauzule)
- (Opakování:) **Lineární rezoluční důkaz** C **z** P je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0\rangle, \ldots \langle C_n, B_n\rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - C_0 a každá B_i jsou prvky P **nebo některé** $C_j, j < i$
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i
- **Lineární vstupní (*Linear Input*) rezoluce (LI-rezoluce)** C z $P \cup \{G\}$ posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0\rangle, \ldots \langle C_n, B_n\rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - $C_0 = G$ **a každá** B_i **jsou prvky** P lineární rezoluce + vstupní rezoluce
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály
- **Věta:** Existuje-li rezoluční důkaz prázdné množiny z množiny S Hornových klauzulí, pak tento rezoluční strom má v listech **jedinou cílovou klauzuli**.
  - pokud začnu důkaz pravidlem a faktem, pak dostanu zase pravidlo
  - pokud začnu důkaz dvěma pravidly, pak dostanu zase pravidlo
  - na dvou faktech rezolvovat nelze

  ⇒ dokud nepoužiji cíl pracuji stále s množinou faktů a pravidel
  - pokud použiji v důkazu cílovou klauzulí,
    fakta mi ubírají negat.literály, pravidla mi je přidávají,
    v rezolventě mám stále samé negativní literály, tj. nelze rezolvovat s dalším cílem

Korektnost a úplnost

- **Věta:** Množina S Hornových klauzulí je nesplnitelná, právě když existuje rezoluční vyvrácení S pomocí **vstupní rezoluce**.
- **Korektnost** platí stejně jako pro ostatní omezení rezoluce
- **Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  Nechť P je množina programových klauzulí a G cílová klauzule.
  Je-li množina $P \cup \{G\}$ Hornových klauzulí nesplnitelná,
  pak existuje rezoluční vyvrácení $P \cup \{G\}$ pomocí LI-rezoluce.
  - vstupní rezoluce pro (obecnou) formuli sama o sobě není úplná

    ⟹ LI-rezoluce aplikovaná na (obecnou) formuli nezaručuje,
    že nalezeneme důkaz, i když formule platí!
- **Význam LI-rezoluce pro Hornovy klauzule:**
  - $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $G = \{G_1, \ldots, G_m\}$
  - LI-rezolucí ukážeme nesplnitelnost $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge (\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$
  - pokud tedy předpokládáme, že program $\{P_1, \ldots, P_n\}$ platí,
    tak musí být nepravdivá $(\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$, tj. musí platit $G_1 \wedge \cdots \wedge G_m$

Uspořádané klauzule (*definite clauses*)

- Klauzule = množina literálů
- **Uspořádáná klauzule (*definite clause*) = posloupnost literálů**
  - nelze volně měnit pořadí literálů
- **Rezoluční princip pro uspořádané klauzule**:

$$\frac{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \ldots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma}$$

  - **uspořádaná rezolventa**: $\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma$
  - ρ je přejmenování proměnných takové, že klauzule $\{A_0, \ldots, A_n\}$ a $\{B, B_0, \ldots, B_m\}\rho$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor pro A_i a $B\rho$
  - **rezoluce je realizována na literálech** $\neg A_i\sigma$ **a** $B\rho\sigma$
  - je dodržováno pořadí literálů, tj.
    $\{\neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho\}\sigma$ **jde do uspořádané rezolventy přesně na pozici** $\neg A_i\sigma$

Uspořádané klauzule II.

- Uspořádáné klauzule

$$\frac{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \ldots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma}$$

  Hornovy klauzule

$$\frac{:- A_0, \ldots, A_n. \qquad B :- B_0, \ldots, B_m.}{:- (A_0, \ldots, A_{i-1}, B_0\rho, \ldots, B_m\rho, A_{i+1}, \ldots, A_n)\sigma.}$$

- Příklad:

$$\frac{\{\neg s(X), \neg t(1), \neg u(X)\} \qquad \{t(Z), \neg q(Z, X), \neg r(3)\}}{\{\neg s(X), \neg q(1, A), \neg r(3), \neg u(X)\}}$$

$$\frac{:- s(X), t(1), u(X). \qquad t(Z) :- q(Z, X), r(3).}{:- s(X), q(1, A), r(3), u(X).}$$

$$\rho = [X/A] \qquad \sigma = [Z/1]$$

LD-rezoluce

- **LD-rezoluční vyvrácení** množiny uspořádaných klauzulí $P \cup \{G\}$ je posloupnost $\langle G_0, C_0\rangle, \ldots, \langle G_n, C_n\rangle$ taková, že
  - G_i, C_i jsou uspořádané klauzule
  - $G = G_0$
  - $G_{n+1} = \square$
  - G_i je uspořádaná cílová klauzule
  - C_i je přejmenování klauzule z P
    - C_i neobsahuje proměnné, které jsou v $G_j, j \leq i$ nebo v $C_k, k \leq i$
  - $G_{i+1}, 0 \leq i \leq n$ je uspořádaná rezolventa G_i a C_i
- LD-rezoluce: korektní a úplná

SLD-rezoluce

- **Lineární rezoluce se selekčním pravidlem = SLD-rezoluce (*Selected Linear resolution for Definite clauses*)**
  - rezoluce
  - **Selekční** pravidlo
  - **Lineární** rezoluce
  - **Definite** (uspořádané) klauzule
  - vstupní rezoluce
- **Selekční pravidlo** R je funkce, která každé neprázdné klauzuli C přiřazuje nějaký z jejích literálů $R(C) \in C$
  - při rezoluci vybírám z klauzule literál určený selekčním pravidlem
- Pokud se R neuvádí, pak se předpokládá výběr **nejlevějšího literálu**
  - nejlevější literál vybírá i Prolog

Lineární rezoluce se selekčním pravidlem

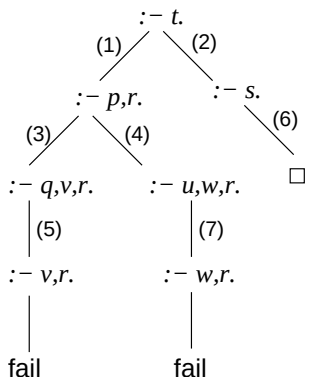
- $P = \{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}, \quad G = \{\neg q, \neg p\}$

- **SLD-rezoluční vyvrácení** $P \cup \{G\}$ pomocí selekčního pravidla R je LD-rezoluční vyvrácení $\langle G_0, C_0\rangle, \ldots, \langle G_n, C_n\rangle$ takové, že $G = G_0, G_{n+1} = \square$ a $R(G_i)$ je literál rezolvovaný v kroku i
- SLD-rezoluce – korektní, úplná
- Efektivita SLD-rezoluce je závislá na
  - selekčním pravidle R
  - způsobu výběru příslušné programové klauzule pro tvorbu rezolventy
    - v Prologu se vybírá vždy klauzule, která je v programu první

Příklad: SLD-strom

$t :- p, r.$ (1)
$t :- s.$ (2)
$p :- q, v.$ (3)
$p :- u, w.$ (4)
$q.$ (5)
$s.$ (6)
$u.$ (7)

$:- t.$



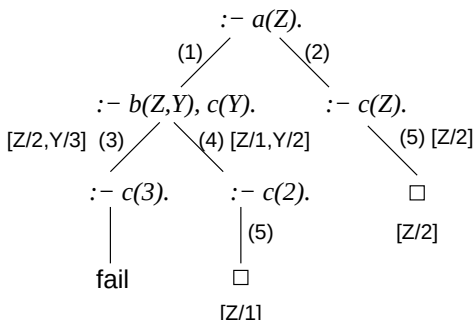
Strom výpočtu (SLD-strom)

- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu P vzhledem k cíli G
- kořenem stromu je cílová klauzule G
- v uzlech stromu jsou rezolventy (rodiče uzlu a programové klauzule)
  - číslo vybrané programové klauzule pro rezoluci je v příkladu uvedeno jako ohodnocení hrany
- listy jsou dvojího druhu:
  - označené prázdnou klauzulí – jedná se o **úspěšné uzly** (*succes nodes*)
  - označené neprázdnou klauzulí – jedná se o **neúspěšné uzly** (*failure nodes*)
- úplnost SLD-rezoluce zaručuje **existenci** cesty od kořene k úspěšnému uzlu pro každý možný výsledek příslušející cíli G

Příklad: SLD–strom a výsledná substituce

$:-a(Z).$

$a(X) :- b(X,Y), c(Y).$ (1)
$a(X) :- c(X).$ (2)
$b(2,3).$ (3)
$b(1,2).$ (4)
$c(2).$ (5)



Cvičení:

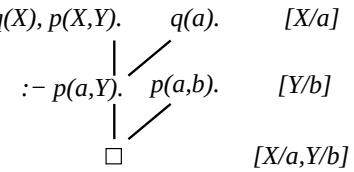
$p(B) :- q(A,B), r(B).$
$p(A) :- q(A,A).$
$q(a,a).$
$q(a,b).$
$r(b).$

ve výsledné substituci jsou pouze proměnné z dotazu
výsledné substituce jsou $[Z/1]$ a $[Z/2]$
nezajímá mě substituce $[Y/2]$

Výsledná substituce (*answer substitution*)

q(a).
p(a,b).

:−q(X), p(X,Y).
X=a, Y=b



- Každý krok SLD-rezoluce vytváří novou unifikační substituci θ_i
  ⇒ potenciální instanciace proměnné ve vstupní cílové klauzuli
- **Výsledná substituce** (*answer substitution*)

$$\theta = \theta_0\theta_1 \cdots \theta_n$$ složení unifikací

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P programových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

  (1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$
  kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G
  nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

  (2) $P \vdash \neg G$

  (3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

  a jedná se tak o **důkaz existence vhodných objektů**, které na základě vlastností množiny P splňují konjunkci literálů v cílové klauzuli

- Důkaz nesplnitelnosti $P \cup \{G\}$ znamená **nalezení protipříkladu** ten pomocí SLD-stromu **konstruuje termy (odpověď)** splňující konjunkci v (3)

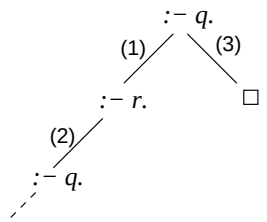
Výpočetní strategie

- **Korektní výpočetní strategie** prohledávání stromu výpočtu musí zaručit, že se každý (konečný) výsledek nalézt v konečném čase
- Korektní výpočetní strategie = **prohledávání stromu do šířky**
  - exponenciální paměťová náročnost
  - složité řídící struktury
- Použitelná výpočetní strategie = **prohledávání stromu do hloubky**
  - jednoduché řídící struktury (zásobník)
  - lineární paměťová náročnost
  - **není ale úplná**: nenalezne vyvrácení i když existuje
    - procházení nekonečné větve stromu výpočtu
      ⇒ na nekonečných stromech dojde k zacyklení
    - nedostaneme se tak na jiné existující úspěšné uzly

SLD-rezoluce v Prologu: úplnost

- **Prolog**: prohledávání stromu do hloubky
  ⇒ **neúplnost** použité výpočetní strategie
- Implementace SLD-rezoluce v Prologu
  - **není úplná**

logický program: $q :- r.$ (1)
$r :- q.$ (2)
$q.$ (3)
dotaz: $:- q.$



Test výskytu

- Kontrola, zda se proměnná vyskytuje v termu, kterým ji substituujeme
  - dotaz : $-a(B,B)$.
  - logický program: $a(X,f(X))$.
  - by vedl k: $[B/X]$, $[X/f(X)]$
- Unifikátor pro $g(X_1,\ldots,X_n)$ a $g(f(X_0,X_0),f(X_1,X_1),\ldots,f(X_{n-1},X_{n-1}))$

$X_1 = f(X_0,X_0), \quad X_2 = f(X_1,X_1),\ldots, \quad X_n = f(X_{n-1},X_{n-1})$
$X_2 = f(f(X_0,X_0),f(X_0,X_0)),\ldots$

délka termu pro X_k exponenciálně narůstá

$\Longrightarrow$ **exponenciální složitost** na ověření kontroly výskytu

- Test výskytu se **při unifikaci v Prologu neprovádí**
- Důsledek: $? - X = f(X)$ uspěje s $X = f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(...)))))))))$

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

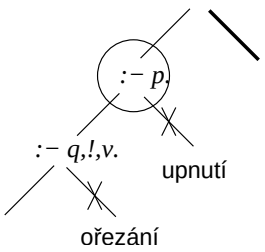
$\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X,X).$ $:- t(X).$
$p(X,f(X)).$ $X = f(f(f(f(...)))))))))$ problém se projeví

(2) $t :- p(X,X).$ $:- t.$
$p(X,f(X)).$ yes dokazovací systém nehledá unifikátor pro X a $f(X)$

- Řešení: problém typu (2) převést na problém typu (1) ?
  - každá proměnná v hlavě klauzule se objeví i v těle, aby se vynutilo hledání unifikátoru (přidáme $X = X$ pro každou X, která se vyskytuje pouze v hlavě)
    $t :- p(X,X).$
    $p(X,f(X)) :- X = X.$
  - optimalizace v kompilátoru mohou způsobit opět odpověď „yes"

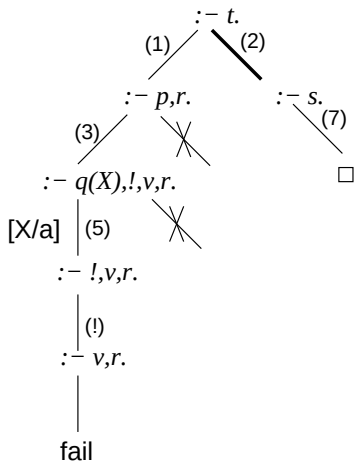
Řízení implementace: řez



- nemá ale žádnou deklarativní sémantiku
- místo toho **mění implementaci programu**
- $p :- q, !, v.$
- snažíme se splnit q
- řez se syntaktický chová jako kterýkoliv jiný literál
- pokud uspěji
  - ⇒ přeskočím řez a pokračuji jako by tam řez nebyl
- pokud ale **neuspěji (a tedy i při backtrackingu) a vracím se přes řez**
  - ⇒ **vracím se až na rodiče** : $-p$. a zkouším další větev
  - ⇒ nezkouším tedy další možnosti, jak splnit p upnutí
  - ⇒ a nezkouším ani další možnosti, jak splnit q v SLD-stromu ořezání

Příklad: řez

$t :- p, r.$ (1)
$t :- s.$ (2)
$p :- q(X), !, v.$ (3)
$p :- u, w.$ (4)
$q(a).$ (5)
$q(b).$ (6)
$s.$ (7)
$u.$ (8)

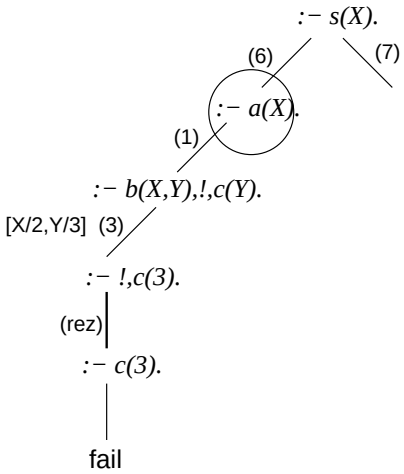


Příklad: řez II

$a(X) :- b(X, Y), !, c(Y).$ (1)
$a(X) :- c(X).$ (2)
$b(2, 3).$ (3)
$b(1, 2).$ (4)
$c(2).$ (5)

$s(X) :- a(X).$ (6)
$s(X) :- p(X).$ (7)

$p(B) :- q(A, B), r(B).$ (8)
$p(A) :- q(A, A).$ (9)
$q(a, a).$ (10)
$q(a, b).$ (11)
$r(b).$ (12)

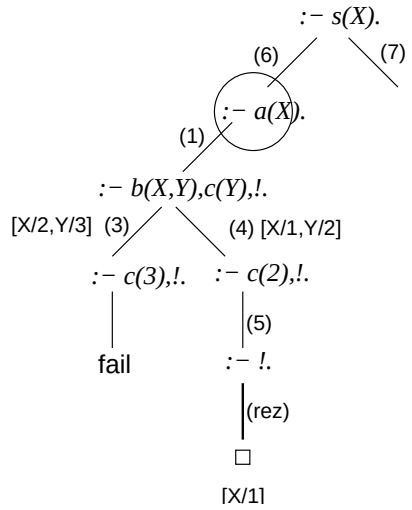


Příklad: řez III

$a(X) :- b(X, Y), c(Y), !.$ (1)
$a(X) :- c(X).$ (2)
$b(2, 3).$ (3)
$b(1, 2).$ (4)
$c(2).$ (5)

$s(X) :- a(X).$ (6)
$s(X) :- p(X).$ (7)

$p(B) :- q(A, B), r(B).$ (8)
$p(A) :- q(A, A).$ (9)
$q(a, a).$ (10)
$q(a, b).$ (11)
$r(b).$ (12)



Operační a deklarativní semantika

Operační sémantika

- **Operační sémantikou** logického programu P rozumíme množinu $O(P)$ všech atomických formulí bez proměnných, které lze pro nějaký cíl $\mathcal{G}$[1] odvodit nějakým rezolučním důkazem ze vstupní množiny $P \cup \{\mathcal{G}\}$.

  [1]tímto výrazem jsou míněny všechny cíle, pro něž zmíněný rezoluční důkaz existuje.

- **Deklarativní sémantika** logického programu P ???

Opakování: interpretace

- **Interpretace** $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := " + "$
- Interpretace se nazývá **modelem** formule, je-li v ní tato formule pravdivá
  - interpretace množiny $\mathbb{N}$ s obvyklými operacemi je modelem formule (0 + s(0) = s(0))

Herbrandovy interpretace

- Omezení na obor skládající se ze **symbolických výrazů tvořených z predikátových a funkčních symbolů daného jazyka**
  - při zkoumání pravdivosti není nutné uvažovat modely nad všemi interpretacemi
- **Herbrandovo univerzum**: množina všech termů bez proměnných, které mohou být tvořeny funkčními symboly a konstantami daného jazyka
- **Herbrandova interpretace**: libovolná interpretace, která přiřazuje
  - proměnným prvky Herbrandova univerza
  - konstantám sebe samé
  - funkčním symbolům funkce, které symbolu f pro argumenty $t_1, \cdots, t_n$ přiřadí term f($t_1, \cdots, t_n$)
  - predikátovým symbolům libovolnou funkci z Herbrand. univerza do pravdivostních hodnot
- **Herbrandův model** množiny uzavřených formulí $\mathcal{P}$:
  Herbrandova interpretace taková, že každá formule z $\mathcal{P}$ je v ní pravdivá.

Specifikace Herbrandova modelu

- Herbrandovy interpretace mají předdefinovaný význam funktorů a konstant
- Pro specifikaci Herbrandovy interpretace tedy stačí zadat relace pro každý predikátový symbol
- Příklad: Herbrandova interpretace a Herbrandův model množiny formulí

```
lichy(s(0)).                % (1)
lichy(s(s(X))) :- lichy(X). % (2)
```

  - $\mathcal{I}_1 = \emptyset$ není model (1)
  - $\mathcal{I}_2 = \{lichy(s(0))\}$ není model (2)
  - $\mathcal{I}_3 = \{lichy(s(0)), lichy(s(s(s(0))))\}$ není model (2)
  - $\mathcal{I}_4 = \{lichy(s^n(0)) | n \in \{1,3,5,7,\ldots\}\}$ Herbrandův model (1) i (2)
  - $\mathcal{I}_5 = \{lichy(s^n(0)) | n \in \mathbb{N}\}$ Herbrandův model (1) i (2)

Příklad: Herbrandovy interpretace

```
rodic(a,b).
rodic(b,c).
predek(X,Y) :- rodic(X,Y).
predek(X,Z) :- rodic(X,Y), predek(Y,Z).
```

$\mathcal{I}_1 = \{rodic(a,b), rodic(b,c), predek(a,b), predek(b,c), predek(a,c)\}$
$\mathcal{I}_2 = \{rodic(a,b), rodic(b,c),$
$predek(a,b), predek(b,c), predek(a,c), predek(a,a)\}$

$\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ jsou Herbrandovy modely klauzulí

Cvičení: Napište minimální Herbrandův model pro následující logický program.

```
muz(petr). muz(pavel). zena(olga). zena(jitka).
pary(X,Y) :- zena(X), muz(Y).
```

Uved'te další model tohoto programu, který není minimální.

Deklarativní a operační sémantika

- Je-li S množina programových klauzulí a M libovolná množina Herbrandových modelů S, pak **průnik těchto modelů** je opět Herbrandův model množiny S.
- **Důsledek:**
  Existuje **nejmenší Herbrandův model** množiny S, který značíme $M(S)$.
- **Deklarativní sémantikou** logického programu P rozumíme jeho minimální Herbrandův model $M(P)$.
- Připomenutí: **Operační sémantikou** logického programu P rozumíme množinu $O(P)$ všech atomických formulí bez proměnných, které lze pro nějaký cíl $\mathcal{G}$[1] odvodit nějakým rezolučním důkazem ze vstupní množiny $P \cup \{\mathcal{G}\}$.

  [1]tímto výrazem jsou míněny všechny cíle, pro něž zmíněný rezoluční důkaz existuje.
- Pro libovolný logický program P platí $M(P) = O(P)$

Negace v logickém programování

Negativní znalost

- logické programy vyjadřují **pozitivní znalost**
- **negativní literály:** pozice určena definicí Hornových klauzulí
  ⇒ nelze vyvodit **negativní** informaci z logického programu
  - každý predikát definuje úplnou relaci
  - negativní literál **není** logickým důsledkem programu
- relace vyjádřeny explicitně v nejmenším Herbrandově modelu
  - $nad(X,Y) :- na(X,Y).$ $\quad na(c,b).$
    $nad(X,Y) :- na(X,Z), nad(Z,Y).$ $\quad na(b,a).$
  - nejmenší Herbrandův model: $\{na(b,a), na(c,b), nad(b,a), nad(c,b), nad(c,a)\}$
- ani program ani model nezahrnují negativní informaci
  - a není nad c, a není na c
  - i v realitě je negativní informace vyjadřena explicitně zřídka, např. jízdní řád

Předpoklad uzavřeného světa

- neexistence informace chápána jako opak:
  předpoklad uzavřeného světa (*closed world assumption*, CWA)
- převzato z databází
- určitý vztah platí **pouze** když je vyvoditelný z programu.
- „odvozovací pravidlo" (A je (uzavřený) term): $\dfrac{\mathrm{P} \not\models A}{\neg A}$ (CWA)
- pro SLD-rezoluci: $P \not\models nad(a,c)$, tedy lze podle CWA odvodit $\neg nad(a,c)$
- problém: není rozhodnutelné, zda daná atomická formule je logickým důsledkem daného logického programu.
  - nelze tedy určit, zda pravidlo CWA je aplikovatelné nebo ne
- CWA v logickém programování obecně nepoužitelná.

Negace jako neúspěch (*negation as failure*)

- slabší verze CWA: **definitivně neúspěšný (*finitely failed*) SLD-strom** cíle : $-A$

  $\dfrac{\text{: } -A \text{ má definitivně (konečně) neúspěšný SLD-strom}}{\neg A}$ **(*negation as failure*, NF**
- **normální cíl**: cíl obsahující i negativní literály
  - : $-nad(c,a), \neg nad(b,c).$
- rozdíl mezi CWA a NF
  - program $nad(X,Y) :- nad(X,Y)$, cíl : $-\neg nad(b,c)$
  - neexistuje odvození cíle podle NF, protože SLD-strom : $-nad(b,c)$ je nekonečný
  - existuje odvození cíle podle CWA, protože neexistuje vyvrácení : $-nad(b,c)$
- CWA i NF jsou nekorektní: A není logickým důsledkem programu P
- řešení: definovat programy tak, aby jejich důsledkem byly i negativní literály
  zúplnění logického programu

Podstata zúplnění logického programu

- převod všech **if** příkazů v logickém programu na **iff**
  - $nad(X,Y) :- na(X,Y).$
    $nad(X,Y) :- na(X,Z), nad(Z,Y).$
  - lze psát jako: $nad(X,Y) :- (na(X,Y)) \vee (na(X,Z), nad(Z,Y)).$
  - zúplnění: $nad(X,Y) \leftrightarrow (na(X,Y)) \vee (na(X,Z), nad(Z,Y)).$
  - X je nad Y **právě tehdy, když alespoň jedna z podmínek platí**
  - tedy **pokud žádná z podmínek neplatí**, X **není** nad Y
- kombinace klauzulí je možná pouze pokud mají identické hlavy
  - $na(c,b).$
    $na(b,a).$
  - lze psát jako: $na(X_1,X_2) :- X_1 = c, X_2 = b.$
    $na(X_1,X_2) :- X_1 = b, X_2 = a.$
  - zúplnění: $na(X_1,X_2) \leftrightarrow (X_1 = c, X_2 = b) \vee (X_1 = b, X_2 = a).$

Zúplnění programu

- **Zúplnění programu** P je: $\mathrm{comp}(P) := \mathrm{IFF}(P) \cup \mathrm{CET}$
- Základní vlastnosti:
  - $\mathrm{comp}(\mathrm{P}) \models \mathrm{P}$
  - do programu je přidána pouze negativní informace
- **IFF**$(\mathbf{P})$: spojka $:-$ v $\mathrm{IF}(\mathrm{P})$ je nahrazena spojkou $\leftrightarrow$
- **IF**(P): množina všech formulí **IF**(q, P)
  pro všechny predikátové symboly q v programu P
- Cíl: definovat **IF**(q, P)
- $def(p/n)$ predikátu p/n je množina všech klauzulí predikátu p/n

IF(q, P)

$na(X_1, X_2) :- \underline{\exists Y(X_1 = c, X_2 = b, f(Y))} \vee (X_1 = b, X_2 = a, g).$

$\underline{na(c, b) :- f(Y).}$ $na(b, a) :- g.$

- q/n predikátový symbol programu P
- $X_1, \ldots, X_n$ jsou „nové" proměnné, které se nevyskytují nikde v P
- Nechť C je klauzule ve tvaru
  $q(t_1, \ldots, t_n) :- L_1, \ldots, L_m$
  kde $m \geq 0$, $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy a $L_1, \ldots, L_m$ jsou literály.

  Pak označme $\mathbf{E}(C)$ výraz $\exists Y_1, \ldots, Y_k(X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n, L_1, \ldots, L_m)$
  kde $Y_1, \ldots, Y_k$ jsou všechny proměnné v C.
- Nechť $def(q/n) = \{C_1, \ldots, C_j\}$.

  Pak formuli **IF**(q, P) získáme následujícím postupem:

  $q(X_1, \ldots, X_n) :- \mathbf{E}(C_1) \vee \mathbf{E}(C_2) \vee \cdots \vee \mathbf{E}(C_j)$ pro $j > 0$ a
  $q(X_1, \ldots, X_n) :- \square$ pro $j = 0$ [q/n není v programu P]

Clarkova Teorie Rovnosti (CET)

všechny formule jsou univerzálně kvantifikovány:

1. $X = X$
2. $X = Y \rightarrow Y = X$
3. $X = Y \wedge Y = Z \rightarrow X = Z$
4. pro každý f/m: $X_1 = Y_1 \wedge \cdots \wedge X_m = Y_m \rightarrow f(X_1, \ldots, X_m) = f(Y_1, \ldots, Y_m)$
5. pro každý p/m: $X_1 = Y_1 \wedge \cdots \wedge X_m = Y_m \rightarrow (p(X_1, \ldots, X_m) \rightarrow p(Y_1, \ldots, Y_m))$
6. pro všechny různé f/m a g/n, $(m, n \geq 0)$: $f(X_1, \ldots, X_m) \neq g(Y_1, \ldots, Y_n)$
7. pro každý f/m: $f(X_1, \ldots, X_m) = f(Y_1, \ldots, Y_m) \rightarrow X_1 = Y_1 \wedge \cdots \wedge X_m = Y_m$
8. pro každý term t obsahující X jako vlastní podterm: $t \neq X$

$X \neq Y$ je zkrácený zápis $\neg(X = Y)$

Korektnost a úplnost NF pravidla

- **Korektnost NF pravidla**: Nechť P logický program a $:-A$ cíl.
  Jestliže $:-A$ má definitivně neúspěšný SLD-strom,
  pak $\forall(\neg A)$ je logickým důsledkem $\mathrm{comp}(P)$ (nebo-li $\mathrm{comp}(P) \models \forall(\neg A)$)
- **Úplnost NF pravidla**: Nechť P je logický program. Jestliže $\mathrm{comp}(P) \models \forall(\neg A)$,
  pak existuje definitivně neúspěšný SLD-strom $:-A$.
  - zůstává problém: není rozhodnutelné, zda daná atomická formule je logickým důsledkem daného logického programu.
  - teorém mluví pouze o **existenci** definitivně neúspěšného SLD-stromu
  - definitivně (konečně) neúspěšný SLD-strom sice existuje, ale nemusíme ho nalézt
    - např. v Prologu: může existovat konečné odvození, ale program přesto cyklí (Prolog nenajde definitivně neúspěšný strom)
- Odvození pomocí NF pouze **test**, nelze **konstruovat** výslednou substituci
  - v $(\mathrm{comp}(P) \models \forall(\neg A))$ je A všeob. kvantifikováno, v $\forall(\neg A)$ nejsou volné proměnné

Normální a stratifikované programy

- **normální program:** obsahuje negativní literály v pravidlech
- problém: existence zúplnění, která nemají žádný model
  - $p :- \neg p.$ zúplnění: $p \leftrightarrow \neg p$
- rozdělení programu na vrstvy
  - vynucují použití negace relace pouze tehdy pokud je relace úplně definovaná
  - $a.$ $a.$
    $a :- \neg b, a.$ $a :- \neg b, a.$
    $b.$ $b :- \neg a.$
    stratifikovaný není stratifikovaný
- normální program P je **stratifikovaný**: množina predikátových symbolů programu lze rozdělit do disjunktních množin $S_0, \ldots, S_m$ ($S_i \equiv$ **stratum**)
  - $p(\ldots) :- \ldots, q(\ldots), \ldots \in P,\ p \in S_k \Longrightarrow q \in S_0 \cup \ldots \cup S_k$
  - $p(\ldots) :- \ldots, \neg q(\ldots), \ldots \in P,\ p \in S_k \Longrightarrow q \in S_0 \cup \ldots \cup S_{k-1}$

Stratifikované programy II

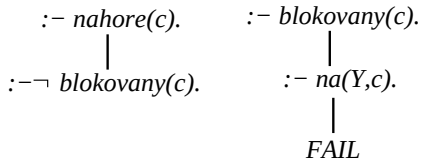
- program je m-**stratifikovaný** $\Longleftrightarrow$ m je nejmenší index takový, že $S_0 \cup \ldots \cup S_m$ je množina všech predikátových symbolů z P
- **Věta:** Zúplnění každého stratifikovaného programu má Herbrandův model.
  - $p :- \neg p.$ nemá Herbrandův model
  - $p :- \neg p.$ ale není stratifikovaný
- stratifikované programy nemusí mít **jedinečný** minimální Herbrandův model
  - $cykli :- \neg zastavi.$
  - dva minimální Herbrandovy modely: $\{cykli\}, \{zastavi\}$
  - důsledek toho, že $cykli :- \neg zastavi.$ je ekvivalentní $cykli \vee zastavi$

SLDNF rezoluce: úspěšné odvození

- NF pravidlo: $\dfrac{:- C.\ \text{má konečně neúspěšný SLD-strom}}{\neg C}$
- Pokud máme negativní podcíl $\neg C$ v dotazu G, pak hledáme důkaz pro C
- **Pokud odvození C selže (strom pro C je konečně neúspěšný), pak je odvození G (i $\neg C$) celkově úspěšné**

$nahore(X) :- \neg blokovany(X).$
$blokovany(X) :- na(Y, X).$
$na(a, b).$

$:- nahore(c).$
yes



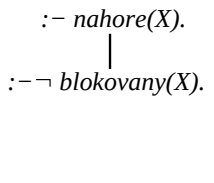
⇒ **uspěšné odvození**

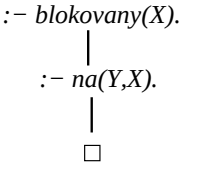
SLDNF rezoluce: neúspěšné odvození

- NF pravidlo: $\dfrac{:- C.\ \text{má konečně neúspěšný SLD-strom}}{\neg C}$
- Pokud máme negativní podcíl $\neg C$ v dotazu G, pak hledáme důkaz pro C
- **Pokud existuje vyvrácení C s prázdnou substitucí (strom pro C je konečně úspěšný), pak je odvození G (i $\neg C$) celkově neúspěšné**

$nahore(X) :- \neg blokovany(X).$
$blokovany(X) :- na(Y, X).$
$na(_, _).$

$:- nahore(X).$
no





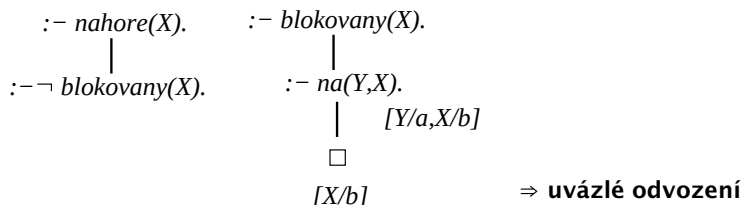
⇒ **neúspěšné odvození**

SLDNF rezoluce: uvázlé odvození

- NF pravidlo: $\dfrac{:-C.\ \text{má konečně neúspěšný SLD-strom}}{\neg C}$
- Pokud máme negativní podcíl $\neg C$ v dotazu G, pak hledáme důkaz pro C
- **Pokud existuje vyvrácení C s neprázdnou substitucí (strom pro C je konečně úspěšný), pak je odvození G (i $\neg C$) uvázlé**

$nahore(X) :- \neg blokovany(X).$
$blokovany(X) :- na(Y,X).$
$na(a,b).$

$:- nahore(X).$



⇒ **uvázlé odvození**

Cvičení: SLDNF odvození

Napište množinu SLDNF odvození pro uvedený dotaz.

```
:- a(B).

a(X) :- b(X), \+ c(X).
a(X) :- d(X), Y is X+1, \+ c(Y), b(X).

b(1).

c(A) :- d(A).

d(1).
```


SLD$^+$ odvození

- P je normální program, G_0 normální cíl, R selekční pravidlo:
  SLD$^+$-odvození G_0 je buď konečná posloupnost

$$\langle G_0; C_0\rangle, \ldots, \langle G_{i-1}; C_{i-1}\rangle, G_i$$

  nebo nekonečná posloupnost

$$\langle G_0; C_0\rangle, \langle G_1; C_1\rangle, \langle G_2; C_2\rangle, \ldots$$

  kde v každém kroku $m+1 (m \geq 0)$, R vybírá **pozitivní literál** v G_m a dospívá k G_{m+1} obvyklým způsobem.

- konečné SLD$^+$-odvození může být:
  1. **úspěšné:** $G_i = \square$
  2. **neúspěšné**
  3. **blokované:** G_i je negativní (např. $\neg A$)

SLDNF rezoluce: pojmy

- **Úroveň cíle**
  - P normální program, G_0 normální cíl, R selekční pravidlo:
    úroveň cíle G_0 se rovná
    - $\mathbf{0} \iff$ žádné SLD$^+$-odvození s pravidlem R není blokováno
    - $k+\mathbf{1} \iff$ maximální úroveň cílů : $-A$,
      které ve tvaru $\neg A$ blokují SLD$^+$-odvození G_0, je k
  - nekonečná úroveň cíle: **blokované SLDNF odvození**
- **Množina SLDNF odvození** = {(SLDNF odvození G_0) $\cup$ (SLDNF odvození : $-A$)}
  - při odvozování G_0 jsme se dostali k cíli $\neg A$
- SLDNF odvození cíle G ?

SLDNF rezoluce

P normální program, G_0 normální cíl, R selekční pravidlo:

množina SLDNF odvození a podmnožina neúspěšných SLDNF odvození cíle G_0 jsou takové nejmenší množiny, že:

- každé **SLD$^+$-odvození** G_0 je SLDNF odvození G_0
- je-li SLD$^+$-odvození $\langle G_0; C_0\rangle, \ldots, G_i$ **blokováno na** $\neg A$
  - tj. G_i je tvaru : $- L_1, \ldots, L_{m-1}, \neg A, L_{m+1}, \ldots, L_n$

  pak
  - **existuje-li SLDNF odvození** : $-A$ (pod R) s prázdnou cílovou substitucí, pak $\langle G_0; C_0\rangle, \ldots, G_i$ je **neúspěšné SLDNF odvození**
  - je-li **každé úplné SLDNF odvození** : $-A$ **(pod R) neúspěšné** pak $\langle G_0; C_0\rangle, \ldots, \langle G_i, \epsilon\rangle, (: - L_1, \ldots, L_{m-1}, L_{m+1}, \ldots, L_n)$ je **(úspěšné) SLDNF odvození cíle** G_0
    - ϵ označuje prázdnou cílovou substituci

Typy SLDNF odvození

Konečné SLDNF-odvození může být:

1. **úspěšné:** $G_i = \square$
2. **neúspěšné**
3. **uvázlé (*flounder*):**
   G_i je negativní ($\neg A$) a : $-A$ je úspěšné **s neprázdnou cílovou substitucí**
4. **blokované:** G_i je negativní ($\neg A$) a : $-A$ nemá konečnou úroveň.

Korektnost a úplnost SLDNF odvození

- **korektnost SLDNF-odvození:**
  P normální program, : $-G$ normální cíl a R je selekční pravidlo:
  je-li θ cílová substituce SLDNF-odvození cíle : $-G$, pak
  $G\theta$ je logickým důsledkem comp(P)
  - implementace SLDNF v Prologu není korektní
  - Prolog neřeší uvázlé SLDNF-odvození (neprázdná substituce)
  - použití bezpečných cílů (negace neobsahuje proměnné)
- **úplnost SLDNF-odvození:** SLDNF-odvození **není** úplné
  - pokud existuje konečný neúspěšný strom : $-A$, pak $\neg A$ platí

    ale místo toho se odvozování : $-A$ může zacyklit, tj. SLDNF rezoluce $\neg A$ neodvodí

  $\Rightarrow$ $\neg A$ tedy sice platí, ale SLDNF rezoluce ho nedokáže odvodit

Logické programování s omezujícími podmínkami

Constraint Logic Programming: CLP

CP: elektronické materiály

- Dechter, R. **Constraint Processing.** Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
  - `http://www.ics.uci.edu/~dechter/books/materials.html`

    průsvitky ke knize
- Barták R. **Přednáška Omezující podmínky na MFF UK, Praha**.
  - `http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/podminky/index.html`
- **SICStus Prolog User's Manual**. Kapitola o CLP(FD).
  - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/sicstus/doc/html/`
- **Příklady v distribuci SICStus Prologu**: cca 60 příkladů, zdrojový kód
  - `lib/sicstus-*/library/clpfd/examples/`

Probírané oblasti

- Obsah
  - úvod: od LP k CLP
  - základy programování
  - základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- Příbuzné přednášky na FI
  - PA163 Programování s omezujícími podmínkami
    - viz interaktivní osnova IS
  - PA167 Rozvrhování
    - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/rozvrhovani`
    - zahrnuty CP techniky pro řešení rozvrhovacích problémů

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_k\}$

  Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \ldots \times D_k$
  - omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně
- Příklad:
  - proměnné: A,B
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B
  - omezení: A≠B nebo (A,B) ∈ {(0,1),(0,2),(1,2)}
- Omezení c definováno na $y_1, \ldots y_k$ je **splněno**,
  pokud pro $d_1 \in D_1, \ldots d_k \in D_k$ platí $(d_1, \ldots d_k) \in c$
  - příklad (pokračování): omezení splněno pro $(0,1), (0,2), (1,2)$, není splněno pro $(1,1)$

Problém splňování podmínek (CSP)

- Dána
  - konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$
  - konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$
    - omezení je definováno na podmnožině X

  Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)
  (constraint satisfaction problem)
- Příklad:
  - proměnné: A,B,C
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B {0,2} pro C
  - omezení: A≠B, B≠C

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_k), k < n$
  - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_n)$
  - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
  - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
  - $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
    - pro každé $c_i \in C$ na $x_{i_1}, \ldots x_{i_k}$ platí $(d_{i_1}, \ldots d_{i_k}) \in c_i$
- Hledáme: jedno nebo
  všechna řešení nebo
  optimální řešení (vzhledem k objektivní funkci)

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\}, \{3,4\}, \ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**
  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` **Marie=6**
- **řešení CSP:**
  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1`
- **všechna řešení:** ještě `Jan=6,` **Petr=4**`, Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`
- optimálizace: ženy učí co nejdříve
  `Anna+Eva+Marie #= Cena` minimalizace hodnoty proměnné Cena
  optimální řešení: `Jan=6,` **Petr=4,** `Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`

CLP(FD) program

- Základní struktura **CLP programu**
  1. definice proměnných a jejich domén
  2. definice omezení
  3. hledání řešení
- (1) a (2) deklarativní část
  - **modelování** problému
  - vyjádření problému splňování podmínek
- (3) řídící část
  - **prohledávání** stavového prostoru řešení
  - procedura pro hledání řešení (enumeraci) se nazývá **labeling**
  - umožní nalézt jedno, všechna nebo optimální řešení

Kód CLP(FD) programu

```
% základní struktura CLP programu
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),        domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),         all_distinct([Jan,Petr,...])
     labeling( Variables ).

% triviální labeling
labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-
     fd_min(Var,Min),                  % výběr nejmenší hodnoty z domény
     ( Var#=Min, labeling( Rest )
     ;
       Var#>Min , labeling( [Var|Rest] )
     ).
```

Příklad: algebrogram

- Přiřaďte cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`
- ```
                1000*S + 100*E + 10*N + D
  +             1000*M + 100*O + 10*R + E
  #=  10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
  ```
- `all_distinct( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`
- `labeling( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
  - **CLP($\mathcal{A}$)** generický jazyk
  - **CLP(FD)** domény proměnných jsou konečné *(Finite Domains)*
  - **CLP($\mathbb{R}$)** doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
  - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
  - dosáhnout větší efektivity
- **Unifikace v LP je nahrazena splňováním podmínek**
  - unifikace se chápe jako **jedna z** podmínek
  - `A = B`
  - `A #< B, A in 0..9, domain([A,B],0,9), all_distinct([A,B,C])`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`
- **Podmínky jako výstup**
  - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup
  - dotaz: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    výstup: `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`

Syntaxe CLP

- Výběr jazyka omezení
- CLP klauzule

  jako LP klauzule, ale její tělo může obsahovat omezení daného jazyka

  `p(X,Y) :- X #< Y+1, q(X), r(X,Y,Z).`
- Rezoluční krok v LP
  - kontrola existence nejobecnějšího unifikátoru (MGU) mezi cílem a hlavou
- Krok odvození v CLP také zahrnuje
  - kontrola konzistence aktuální množiny omezení s omezeními v těle klauzule

⇒ Vyvolání dvou řešičů: unifikace + řešič omezení
  ```

Operační sémantika CLP

- CLP výpočet cíle G
  - $Store$ množina aktivních omezení ≡ **prostor omezení** ***(constraint store)***
  - inicializace $Store = \emptyset$
  - seznamy cílů v G prováděny v obvyklém pořadí
  - pokud narazíme na cíl s omezením c: $NewStore = Store \cup \{c\}$
  - snažíme se splnit c vyvoláním jeho řešiče
    - při neúspěchu se vyvolá backtracking
    - při úspěchu se podmínky v $NewStore$ zjednoduší propagací omezení
  - zbývající cíle jsou prováděny s upraveným $NewStore$
- CLP výpočet cíle G je úspěšný, pokud se dostaneme z iniciálního stavu $\langle G, \emptyset \rangle$ do stavu $\langle G', Store \rangle$, kde G' je prázdný cíl a $Store$ je splnitelná.

Systémy a jazyky pro CP

- **IBM ILOG CP** 1987
  - omezující podmínky v C++, Jave nebo generickém modelovacím jazyku OPL
  - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
  - špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
  - nyní nově volně dostupný pro akademické použití
- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECL^{i}PS^e** 1984
  - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, `repair`
  - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris
- Mnoho dalších systémů: Choco, Gecode, Minion, Oz, SWI Prolog, ...

CLP(FD) v SICStus Prologu

CLP(FD) v SICStus Prologu

- Vestavěné predikáty jsou dostupné v separátním modulu (knihovně)
  `:- use_module(library(clpfd)).`
- Obecné principy platné všude nicméně standarty jsou nedostatečné
  - stejné/podobné vestavěné predikáty existují i jinde
  - CLP knihovny v SWI Prologu i ECLiPSe se liší

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` — `domain( +Variables, +Min, +Max)`
  ```
  A in 1..3
  B in 1..3
  ```
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` — `?X in +Min..+Max`
  ```
  A in (1..3) \/ (5..8)
  ```
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` — `?X in +Range`
  ```
  A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}
  ```
- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var,?Range)`
  - `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A,Range).` — `Range=(1..3) \/ (5..8)`
  - `A in 2..10, fd_dom(A,(1..3) \/ (5..8)).` — `no`
- Range term: reprezentace nezávislá na implementaci

Příslušnost k doméně: FDSet termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci
- `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` — `fd_set(?Var,?FDSet)`
  ```
  A in (1..3) \/ (5..8)
  FDSet = [[1|3],[5|8]]
  ```
- `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.` — `?X in_set +FDSet`
  ```
  A in (1..3) \/  (5..8)
  FDSet = [[1|3],[5|8]]
  B in (1..3) \/  (5..8)
  ```
- FDSet termy představují nízko-úrovňovou implementaci
- FDSet termy nedoporučeny v programech
  - používat pouze predikáty pro manipulaci s nimi
  - omezit použití `A in_set [[1|2],[6|9]]`
- Range termy preferovány

Další fd_... predikáty

- `fdset_to_list(+FDset, -List)` vrací do seznamu prvky FDset
- `list_to_fdset(+List, -FDset)` vrací FDset odpovídající seznamu
- `fd_var(?Var)` je Var doménová proměnná?
- `fd_min(?Var,?Min)` nejmenší hodnota v doméně
- `fd_max(?Var,?Max)` největší hodnota v doméně
- `fd_size(?Var,?Size)` velikost domény
- `fd_degree(?Var,?Degree)` počet navázaných omezení na proměnné
  - mění se během výpočtu: pouze aktivní omezení, i odvozená aktivní omezení

Aritmetická omezení

- `Expr RelOp Expr` — `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`
  - `A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * ( D - 5), A/2 #= 4`
  - POZOR: neplést `#=<` a `#>=` s operátory pro implikaci: `#<=` `#=>`
- `sum(Variables,RelOp,Suma)`
  - `domain([A,B,C,F],1,3), sum([A,B,C],#= ,F)`
  - `Variables` i `Suma` musí být doménové proměnné nebo celá čísla
- `scalar_product(Coeffs,Variables,RelOp,ScalarProduct)`
  - `domain([A,B,C,F],1,6), scalar_product( [1,2,3],[A,B,C],#= ,F)`
  - `Variables` i `Value` musí být doménové proměnné nebo celá čísla, `Coeffs` jsou celá čísla
  - POZOR na pořadí argumentů, nejprve jsou celočíselné koeficienty, pak dom. proměnné
  - `scalar_product(Coeffs, Variables, #= , Value, [consistency(domain)])`
    - silnější typ konzistence
    - POZOR: domény musí mít konečné hranice

Základní globální omezení

- `all_distinct(List)`
  - všechny proměnné různé
- `cumulative(...)`
  - disjunktivní a kumulativní rozvrhování
- `cumulatives(...)`
  - kumulativní rozvrhování na více zdrojů

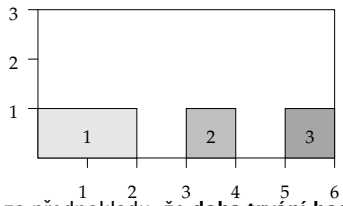
Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
  - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
    `Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,`
    `Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4`
  - `all_different([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
    `Jan in 3..6, Petr in 3..4, Anna in 2..5,`
    `Ota in 2..4, Eva in 3..4, Marie in 1..6`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly
  - příklad s konstantami: `cumulative([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])`



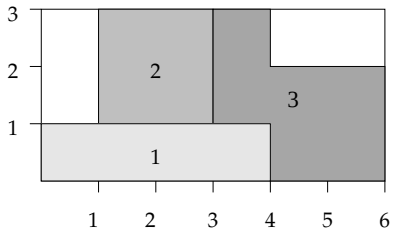
  - příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**

```
JanE#= Jan+3, PetrE#= Petr+1, AnnaE#= Anna+2, ...
cumulative(task(Jan,3,JanE,1,1),task(Petr,1,PetrE,1,2),task(Anna,2,AnnaE,1,
  task(Ota,2,OtaE,1,4),task(Eva,2,EvaE,1,5),task(Marie,3,MarieE,1,6)])
```


Kumulativní rozvrhování

- `cumulative([task(Start,Duration,End,Demand,TaskId) | Tasks],`
  `[limit(Limit)])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly a aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila `Limit`
- Příklad s konstantami:

```
cumulative([task(0,4,4,1,1),task(1,2,3,2,2),task(3,3,6,2,3),task(4,2,6,1,4)],[limit(3)])
```



Kumulativní rozvrhování s více zdroji

- Rozvržení úloh tak, aby se nepřekrývaly a daná kapacita zdrojů nebyla překročena (limit zdroje chápán jako horní mez – bound(upper))
- `cumulatives([task(Start,Duration,End,Demand,MachineId)|Tasks], [machine(Id,Limit)|Machines],[bound(upper)])`
- Úlohy zadány startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a požadovaným typem zdroje (`MachineId`)
- Zdroje zadány identifikátorem (`Id`) a kapacitou (`Limit`)
- Příklad:

```
?- domain([B,C],1,2),
   cumulatives([task(0,4,4,1,1),task(3,1,4,1,B), task(5,1,6,1,C)],
               [machine(1,1),machine(2,1)],
               [bound(upper)]).                    C in 1..2, B=2
```


Příklad: kumulativní rozvrhování

- Vytvořte rozvrh pro následující úlohy, tak aby nebyla překročena kapacita 13 zdroje, a **minimalizujte** celkovou dobu trvání

úloha	doba trvání	kapacita
t1	16	2
t2	6	9
t3	13	3
t4	7	7
t5	5	10
t6	18	1
t7	4	11

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?-  schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?

schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,
    vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),
    after(Ss, Ds, End),     % koncový čas
    append(Ss, [End], Vars),
    labeling([minimize(End)],Vars).

vytvor_ulohy([],[],[],_Id,[]).
vytvor_ulohy([S|Ss], [D|Ds], [R|Rs], Id, [task(S,D,E,R,Id)|Tasks]):-
      NewId is Id+1,
      E #= S+D,
      vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs, NewId,Tasks).

after([], [], _).
after([S|Ss], [D|Ds], End) :- E #>= S+D, after(Ss, Ds, End).
```


Vestavěné predikáty pro labeling

- Instanciace proměnné `Variable` hodnotami v její doméně

  `indomain( Variable )`

  hodnoty jsou instanciovány při backtrackingu ve vzrůstajícím pořadí

```
?- X in 4..5, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ?

labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-    % výběr nejlevější proměnné k instanciaci
     indomain( Var ),         % výběr hodnot ve vzrůstajícím pořadí
     labeling( Rest ).
```

- `labeling( Options, Variables )`

```
?- A in 0..2, B in 0..2, B#< A, labeling([], [A,B]).
```

Uspořádání hodnot a proměnných

- Při prohledávání je rozhodující **uspořádání hodnot a proměnných**
- Určují je **heuristiky výběru hodnot a výběru proměnných**

```
labeling( [] ).
labeling( Variables  ) :-
     select_variable(Variables,Var,Rest),
     select_value(Var,Value),
     ( Var #= Value,
       labeling( Rest )
     ;
       Var #\= Value ,          % nemusí dojít k instanciaci Var
       labeling( Variables )  % proto pokračujeme se všemi proměnnými včetně Var
     ).
```

- **Statické uspořádání:** určeno už před prohledáváním
- **Dynamické uspořádání:** počítá se během prohledávání

Výběr hodnoty

- Obecný princip výběru hodnoty: **první úspěch *(succeed first)***
  - volíme pořadí tak, abychom výběr nemuseli opakovat
  - `?- domain([A,B,C],1,2), A#=B+C.` optimální výběr A=2,B=1,C=1 je bez backtrackingu
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr hodnoty př. `labeling([down], Vars)`
  - `up`: doména procházena ve vzrůstajícím pořadí (default)
  - `down`: doména procházena v klesajícím pořadí
- Parametry `labeling/2` řídící, jak je výběr hodnoty realizován
  - `step`: volba mezi `X #= M`, `X #\= M` (default)
    - viz dřívější příklad u "Uspořádání hodnot a proměnných"
  - `enum`: vícenásobná volba mezi všemi hodnotami v doméně
    - podobně jako při `indomain/1`

Výběr proměnné

- Obecný princip výběru proměnné: ***first-fail***
  - výběr proměnné, pro kterou je nejobtížnější nalézt správnou hodnotu
    pozdější výběr hodnoty pro tuto proměnnou by snadněji vedl k failu
  - výbereme proměnnou **s nejmenší doménou**
  - `?- domain([A,B,C],1,3), A#<3, A#=B+C.` nejlépe je začít s výběrem A
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr proměnné
  - `leftmost`: nejlevější (default)
  - `ff`: s (1) nejmenší velikostí domény `fd_size(Var,Size)`
    (2) (pokud s nejmenší velikostí domény více, tak) nejlevější z nich
  - `ffc`: s (1) nejmenší velikostí domény
    (2) největším množstvím omezením „čekajících" na proměnné `fd_degree(Var,Size)`
    (3) nejlevější z nich
  - `min/max`: s (1) nejmenší/největší hodnotou v doméně proměnné
    (2) nejlevnější z nich `fd_min(Var,Min)/fd_max(Var,Max)`

Hledání optimálního řešení

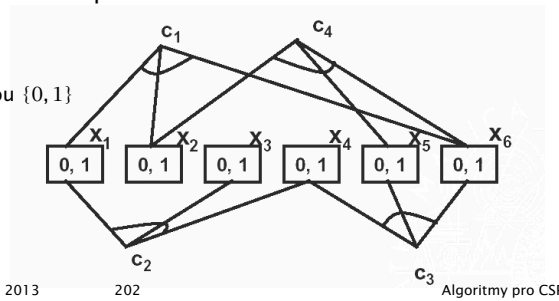
(předpokládejme minimalizaci)

- Parametry `labeling/2` pro optimalizaci: `minimize(F)/maximize(F)`
  - `Cena #= A+B+C, labeling([minimize(Cena)], [A,B,C])`
- **Metoda větví a mezí *(branch&bound)***
  - algoritmus, který implementuje proceduru pro minimalizaci (duálně pro maximalizaci)
  - uvažujeme nejhorší možnou cenu řešení UB (např. cena už nalezeného řešení)
  - počítáme dolní odhad LB ceny částečného řešení
    LB je tedy nejlepší možná cena pro rozšíření tohoto řešení
  - procházíme strom a vyžadujeme, aby prozkoumávaná větev měla cenu $LB < UB$
    pokud je $LB \geq UB$, tak víme, že v této větvi není lepší řešení a odřízneme ji
    - přidává se tedy inkrementálně omezení LB#<UB pro snižující se UB tak, jak nalézáme kvalitnější řešení

Algoritmy pro řešení problému splňování podmínek (CSP)

Grafová reprezentace CSP

- **Reprezentace podmínek**
  - intenzionální (matematická/logická formule)
  - extenzionální (výčet k-tic kompatibilních hodnot, 0-1 matice)
- **Graf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje dva vrcholy)
- **Hypergraf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje množinu vrcholů)
- Reprezentace CSP pomocí **hypergrafu podmínek**
  - vrchol = proměnná, hyperhrana = podmínka
- Příklad
  - proměnné $x_1, \ldots, x_6$ s doménou $\{0, 1\}$
  - omezení $c_1 : x_1 + x_2 + x_6 = 1$
    $c_2 : x_1 - x_3 + x_4 = 1$
    $c_3 : x_4 + x_5 - x_6 > 0$
    $c_4 : x_2 + x_5 - x_6 = 0$

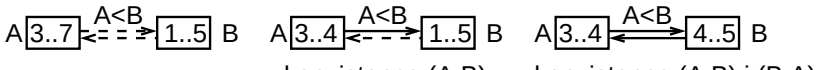


Binární CSP

- **Binární CSP**
  - CSP, ve kterém jsou pouze binární podmínky
  - unární podmínky zakódovány do domény proměnné
- **Graf podmínek** pro binární CSP
  - není nutné uvažovat hypergraf, stačí graf (podmínka spojuje pouze dva vrcholy)
- **Každý CSP lze transformovat na "korespondující" binární CSP**
- Výhody a nevýhody binarizace
  - získáváme unifikovaný tvar CSP problému, řada algoritmů navržena pro binární CSP
  - bohužel ale značné zvětšení velikosti problému
- Nebinární podmínky
  - složitější propagační algoritmy
  - lze využít jejich sémantiky pro lepší propagaci
    - příklad: `all_distinct` vs. množina binárních nerovností

Vrcholová a hranová konzistence

- **Vrcholová konzistence *(node consistency)* NC**
  - každá hodnota z aktuální domény V_i proměnné splňuje všechny unární podmínky s proměnnou V_i
- **Hranová konzistence *(arc consistency)* AC** pro **binární CSP**
  - **hrana** (V_i, V_j) **je hranově konzistentní**, právě když
    pro každou hodnotu x z aktuální domény D_i existuje hodnota y tak, že ohodnocení $[V_i = x, V_j = y]$ splňuje všechny binární podmínky nad V_i, V_j.
  - hranová konzistence je **směrová**
    - konzistence hrany (V_i, V_j) nezaručuje konzistenci hrany (V_j, V_i)



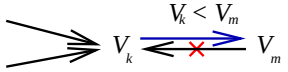
  - **CSP** je **hranově konzistentní**, právě když
    jsou všechny jeho hrany (v obou směrech) hranově konzistentní

Algoritmus revize hrany

- Jak udělat hranu (V_i, V_j) hranově konzistentní?
- Z domény D_i vyřadím takové hodnoty x, které nejsou konzistentní s aktuální doménou D_j (pro x neexistuje žádá hodnoty y v D_j tak, aby ohodnocení $V_i = x$ a $V_j = y$ splňovalo všechny binární podmínky mezi V_i a V_j)
- procedure revise((i,j))
  Deleted := false
  for $\forall x$ in D_i do
  if neexistuje $y \in D_j$ takové, že (x,y) je konzistentní
  then D_i := D_i − $\{x\}$
  Deleted := true
  end if
  return Deleted
  end revise
- domain([V_1,V_2],2,4), V_1#< V_2 revise((1,2)) smaže 4 z D_1,D_2 se nezmění

Dosažení hranové konzistence problému

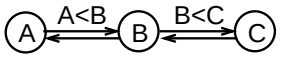
- Jak udělat CSP hranově konzistentní?
  - revize je potřeba opakovat, dokud se mění doména nějaké proměnné
  - efektivnější: opakování revizí můžeme dělat pomocí **fronty**
    - přidáváme do ní hrany, jejichž konzistence mohla být narušena zmenšením domény
- Jaké hrany přesně revidovat po zmenšení domény?
  - ty, jejichž konzistence může být zmenšením domény proměnné narušena jsou to hrany (i,k), které vedou do proměnné V_k se zmenšenou doménou



  - hranu (m,k) vedoucí z proměnné V_m, která zmenšení domény způsobila, není třeba revidovat (změna se jí nedotkne)

Algoritmus AC-3

- procedure AC-3(G)
  Q := $\{(i,j)$ | $(i,j) \in$ hrany(G), $i \neq j\}$ % seznam hran pro revizi
  while Q non empty do
  vyber a smaž (k,m) z Q
  if revise((k,m)) then % pridani pouze hran, ktere
  Q := Q $\cup$ $\{(i,k) \in$ hrany(G), $i \neq k$, $i \neq m\}$ % dosud nejsou ve fronte
  end while
  end AC-3
- Příklad:



A<B, B<C: (3..7,1..5,1..5) $\overset{AB}{\rightarrow}$ (3..4,1..5,1..5) $\overset{BA}{\rightarrow}$
(3..4,4..5,1..5) $\overset{BC}{\rightarrow}$ (3..4,4,1..5) $\overset{CB}{\rightarrow}$ (3..4,4,5)
$\overset{AB}{\rightarrow}$ (3,4,5)

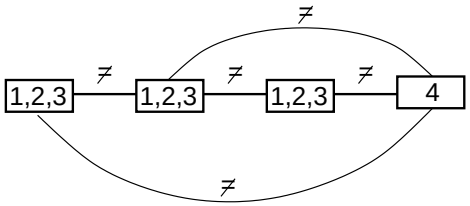
- Technika AC-3 je dnes asi nejpoužívánější, ale stále není optimální
- Jaké budou domény A,B,C po AC-3 pro: domain([A,B,C],1,10), A #= B + 1, C #< B

Je hranová konzistence dostatečná?

- Použitím AC odstraníme mnoho nekompatibilních hodnot
  - Dostaneme potom řešení problému? NE
  - Víme alespoň zda řešení existuje? NE
- domain([X,Y,Z],1,2), X#\= Y, Y#\= Z, Z#\= X
  - hranově konzistentní
  - nemá žádné řešení
- Jaký je tedy význam AC?
  - někdy dá řešení přímo
    - nějaká doména se vyprázdní ⇒ řešení neexistuje
    - všechny domény jsou jednoprvkové ⇒ máme řešení
  - v obecném případě se alespoň zmenší prohledávaný prostor

k-konzistence

- Mají NC a AC něco společného?
  - NC: konzistence jedné proměnné
  - AC: konzistence dvou proměnných
  - . . . můžeme pokračovat
- CSP je **k-konzistentní** právě tehdy, když můžeme libovolné konzistentní ohodnocení (k-1) různých proměnných rozšířit do libovolné k-té proměnné

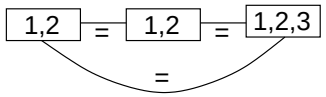


4-konzistentní graf

- Pro obecné CSP, tedy i pro nebinární podmínky

Silná k-konzistence

3-konzistentní graf



není 2-konzistentní

$(1,1)$ lze rozšířit na $(1,1,1)$

$(2,2)$ lze rozšířit na $(2,2,2)$

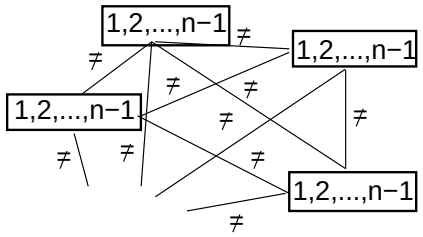
(3) nelze rozšířit

$(1,3)$ ani $(2,3)$ nejsou konzistentní dvojice (nerozšiřujeme je)

- CSP je **silně k-konzistentní** právě tehdy, když je j-konzistentní pro každé j≤k
- Silná k-konzistence ⇒ k-konzistence
- Silná k-konzistence ⇒ j-konzistence $\forall\, j \leq k$
- k-konzistence $\not\Rightarrow$ silná k-konzistence
- NC = silná 1-konzistence = 1-konzistence
- AC = (silná) 2-konzistence

Konzistence pro nalezení řešení

- Máme-li graf s n vrcholy, jak silnou konzistenci potřebujeme, abychom přímo našli řešení?
  - silná n-konzistence je nutná pro graf s n vrcholy
    - n-konzistence nestačí (viz předchozí příklad)
    - silná k-konzistence pro k<n také nestačí



graf s n vrcholy
domény 1..(n-1)

silně k-konzistentní pro každé k<n
přesto nemá řešení

Řešení nebinárních podmínek

- k-konzistence má exponenciální složitost, v reálu se nepoužívá
- S n-árními podmínkami se pracuje přímo
- Podmínka je **obecně hranově konzistentní (GAC)**, právě když pro každou proměnnou V_i z této podmínky a každou hodnou $x \in D_i$ existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - `A + B #= C, A in 1..3, B in 2..4, C in 3..7` je obecně hranově konzistentní
- Využívá se sémantika podmínek
  - speciální typy konzistence pro globální omezení
    - viz `all_distinct`
  - konzistence mezí
    - propagace pouze při změně nejmenší a největší hodnoty v doméně proměnné
- Pro různé podmínky lze použít různý druh konzistence
  - A#<B: hranová konzistence, konzistence mezí

Konzistenční algoritmus pro nebinární podmínky

- Algoritmus s **frontou proměnných** (někdy též nazýván AC-8)
  - opakovaně se provádí revize podmínek, dokud se mění domény

```
procedure Nonbinary-AC-3-with-Variables((V, D, C))
Q := V
while Q non empty do
      vyber a smaž V_j ∈ Q
      for ∀ C takové, že V_j ∈ scope(C) do
          W := revise(V_j, C)
             // W je množina proměnných jejichž, doména se změnila
          if ∃ V_i ∈ W taková, že D_i = ∅ then return fail
          Q := Q ∪ {W}
end  Non-binary-consistency
```

  - **rozsah omezení** $scope(C)$: množina proměnných, na nichž je C definováno
- Implementace: u každé proměnné je seznam **vybraných podmínek** pro propagaci,
  REVISE procedury pro tyto podmínky definuje uživatel v závislosti na typu podmínky

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency*** **BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - podmínka má **konzistentní meze (BC)**, právě když pro každou proměnnou V_j z této podmínky a každou hodnou $x \in D_j$ existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že je podmínka splněna a pro vybrané ohodnocení y_i proměnné V_i platí $\min(D_i) \leq y_i \leq \max(D_i)$
  - stačí propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty (při změně mezí)** v doméně proměnné
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - `A #> B => min(A) = min(B)+1, max(B) = max(A)-1`
  - příklad: `A in 4..10, B in 6..18, A #> B`
    `min(A) = 6+1 ⇒ A in 7..10`
    `max(B) = 10-1 ⇒ B in 6..9`
  - podobně: `A #< B`, `A #>= B`, `A #=< B`

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- `A #= B + C => min(A) = min(B)+min(C), max(A) = max(B)+max(C)`
  `min(B) = min(A)-max(C), max(B) = max(A)-min(C)`
  `min(C) = min(A)-max(B), max(C) = max(A)-min(B)`
  - změna `min(A)` vyvolá pouze změnu `min(B)` a `min(C)`
  - změna `max(A)` vyvolá pouze změnu `max(B)` a `max(C)`, ...
- Příklad: `A in 1..10, B in 1..10, A #= B + 2, A #> 5, A #\= 8`

```
A #= B + 2 ⇒ min(A)=1+2, max(A)=10+2 ⇒ A in 3..10
           ⇒ min(B)=1-2, max(B)=10-2 ⇒ B in 1..8
A #> 5 ⇒ min(A)=6 ⇒ A in 6..10
       ⇒ min(B)=6-2 ⇒ B in 4..8                    (nové vyvolání A #= B + 2)
A #\= 8 ⇒ A in (6..7) \/ (9..10)     (meze stejné, k propagaci A #= B + 2 nedojde)
```

- Vyzkoušejte si: `A #= B - C, A #>= B + C`

Globální podmínky

- Propagace je lokální
  - pracuje se s jednotlivými podmínkami
  - interakce mezi podmínkami je pouze přes domény proměnných
- Jak dosáhnout více, když je silnější propagace drahá?
- Seskupíme několik podmínek do jedné tzv. **globální podmínky**
- Propagaci přes globální podmínku řešíme
  speciálním algoritmem navrženým pro danou podmínku
- Příklady:
  - `all_distinct` omezení: hodnoty všech proměnných různé
  - `serialized` omezení:
    rozvržení úloh zadaných startovním časem a dobou trvání tak, aby se nepřekrývaly

Propagace pro `all_distinct`

- **U = {X2, X4, X5}, dom(U) = {2, 3, 4}**:

  `{2,3,4}` nelze pro `X1, X3, X6`

  `X1 in 5..6, X3 = 5, X6 in {1} \/ (5..6)`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	**3**	**4**
Anna	2	5
Ota	**2**	**4**
Eva	**3**	**4**
Marie	1	6

- **Konzistence:** $\forall \{X_1, \ldots, X_k\} \subset V : card\{D_1 \cup \cdots \cup D_k\} \geq k$
  stačí hledat **Hallův interval** I: velikost intervalu I je rovna počtu proměnných, jejichž doména je v I
- **Inferenční pravidlo**
  - $U = \{X_1, \ldots, X_k\}$, $dom(U) = \{D_1 \cup \cdots \cup D_k\}$
  - $card(U) = card(dom(U)) \Rightarrow \forall v \in dom(U), \forall X \in (V - U), X \neq v$
  - hodnoty v Hallově intervalu jsou pro ostatní proměnné nedostupné
- **Složitost**: $O(2^n)$ – hledání všech podmnožin množiny n proměnných (naivní)
  $O(n \log n)$ – kontrola hraničních bodů Hallových intervalů (1998)

Prohledávání + konzistence

- Splňování podmínek **prohledáváním** prostoru řešení
  - podmínky jsou užívány pasivně jako test
  - přiřazuji hodnoty proměnných a zkouším co se stane
  - vestavěný prohledávací algoritmus Prologu: **backtracking**, triviální: **generuj & testuj**
  - úplná metoda (nalezneme řešení nebo dokážeme jeho neexistenci)
  - zbytečně pomalé (exponenciální): procházím i „evidentně" špatná ohodnocení
- **Konzistenční (propagační) techniky**
  - umožňují odstranění nekonzistentních hodnot z domény proměnných
  - neúplná metoda (v doméně zůstanou ještě nekonzistentní hodnoty)
  - relativně rychlé (polynomiální)
- Používá se **kombinace obou metod**
  - postupné přiřazování hodnot proměnným
  - po přiřazení hodnoty odstranění nekonzistentních hodnot konzistenčními technikami

Prohledávání do hloubky

- Základní prohledávací algoritmus pro problémy splňování podmínek
- **Prohledávání stavového prostoru do hloubky *(depth first search)***
- Dvě fáze prohledávání s navracením
  - **dopředná fáze**: proměnné jsou postupně vybírány, rozšiřuje se částečné řešení přiřazením konzistení hodnoty (pokud existuje) další proměnné
    - po vybrání hodnoty testujeme konzistenci
  - **zpětná fáze**: pokud neexistuje konzistentní hodnota pro aktuální proměnnou, algoritmus se vrací k předchozí přiřazené hodnotě
- Proměnné dělíme na
  - **minulé** – proměnné, které už byly vybrány (a mají přiřazenu hodnotu)
  - **aktuální** – proměnná, která je právě vybrána a je jí přiřazována hodnota
  - **budoucí** – proměnné, které budou vybrány v budoucnosti

Základní algoritmus prohledávání do hloubky

- Pro jednoduchost proměnné očíslujeme a ohodnocujeme je v daném pořadí
- Na začátku voláno jako `labeling(G,1)`

```
procedure labeling(G,a)
if a > |uzly(G)| then return uzly(G)
for ∀x ∈ D_a do
    if consistent(G,a) then   % consistent(G,a) je nahrazeno FC(G,a), LA(G,a)
       R := labeling(G,a+1)
       if R ≠ fail then return R
return fail
end labeling
```

Po přiřazení všech proměnných vrátíme jejich ohodnocení

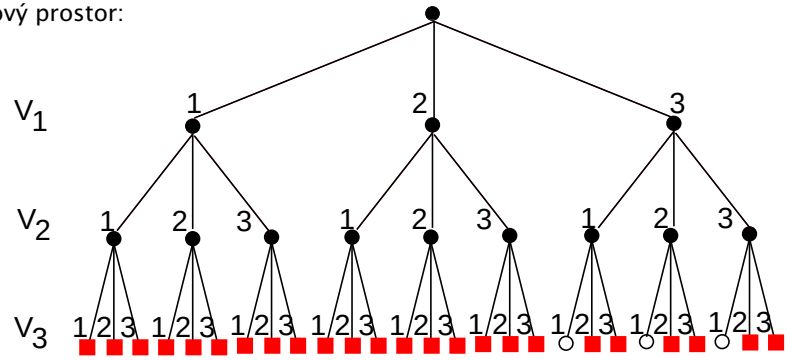
- Procedury `consistent` uvedeme pouze pro binární podmínky

Backtracking (BT)

- Backtracking ověřuje v každém kroku konzistenci podmínek vedoucích z minulých proměnných do aktuální proměnné
- Backtracking tedy zajišťuje konzistenci podmínek
  - na všech minulých proměnných
  - na podmínkách mezi minulými proměnnými a aktuální proměnnou
- procedure BT(G,a)
  Q:=$\{(V_i,V_a) \in$ hrany(G), $i < a\}$ % hrany vedoucí z minulých proměnných do aktuální
  Consistent := true
  while Q není prázdná $\wedge$ Consistent do
    vyber a smaž libovolnou hranu (V_k,V_m) z Q
    Consistent := not revise(V_k,V_m) % pokud vyřadíme prvek, bude doména prázdná
  return Consistent
  end BT

Příklad: backtracking

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 3$, $V_1\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



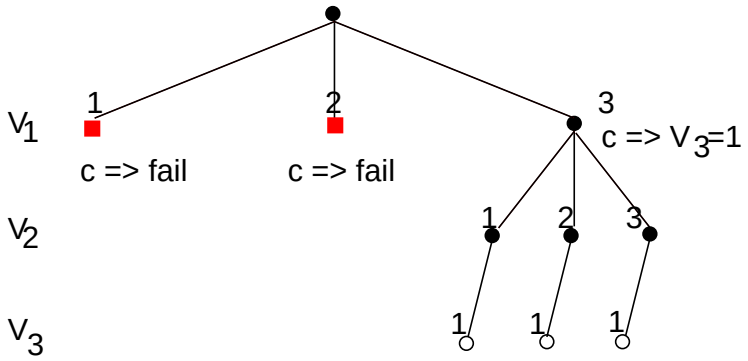
  - červené čtverečky: chybný pokus o instanciaci, řešení neexistuje
  - nevyplněná kolečka: nalezeno řešení
  - černá kolečka: vnitřní uzel, máme pouze částečné přiřazení

Kontrola dopředu *(FC – forward checking)*

- FC je rozšíření backtrackingu
- FC navíc zajišťuje konzistenci mezi aktuální proměnnou a budoucími proměnnými, které jsou s ní spojeny dosud nesplněnými podmínkami
- procedure FC(G,a)
  Q:=$\{(V_i,V_a) \in$ hrany(G), $i > a\}$ % přidání hran z budoucích do aktuální proměnné
  Consistent := true
  while Q není prázdná $\wedge$ Consistent do
    vyber a smaž libovolnou hranu (V_k,V_m) z Q
    if revise$((V_k,V_m))$ then
      Consistent := $(|D_k| > 0)$ % vyprázdnění domény znamená nekonzistenci
  return Consistent
  end FC
- Hrany z minulých proměnných do aktuální proměnné není nutno testovat

Příklad: kontrola dopředu

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 3$, $c : V_1\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



Pohled dopředu *(LA – looking ahead)*

- LA je rozšíření FC, navíc ověřuje konzistenci hran mezi budoucími proměnnými
- procedure LA(G,a)

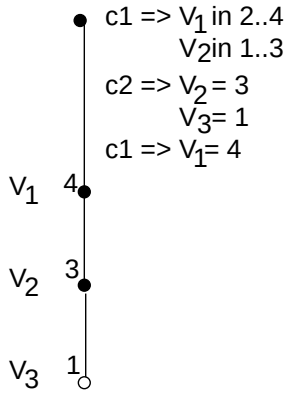
```
Q := {(Vi,Va) ∈ hrany(G), i > a}        % začínáme s hranami do a
Consistent := true
while Q není prázdná ∧ Consistent do
      vyber a smaž libovolnou hranu (Vk,Vm) z Q
      if revise((Vk,Vm)) then
         Q := Q ∪ {(Vi,Vk)|(Vi,Vk) ∈ hrany(G), i ≠ k, i ≠ m, i > a}
         Consistent := (|Dk| > 0)
return Consistent
end LA
```

  - Hrany z minulých proměnných do aktuální proměnné opět netestujeme
  - Tato LA procedura je založena na AC-3, lze použít i jiné AC algoritmy
- **LA udržuje hranovou konzistenci:** protože ale LA(G,a) používá AC-3, musíme **zajistit iniciální konzistenci** pomocí AC-3 ještě před startem prohledávání

Příklad: pohled dopředu (pomocí AC-3)

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 4$, $\quad c1 : V_1\# > V_2, \quad c2 : V_2\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor

  (spouští se iniciální konzistence se před startem prohledávání)



Přehled algoritmů

- **Backtracking (BT)** kontroluje v kroku a podmínky

  $c(V_1, V_a), \ldots, c(V_{a-1}, V_a)$

  z minulých proměnných do aktuální proměnné
- **Kontrola dopředu (FC)** kontroluje v kroku a podmínky

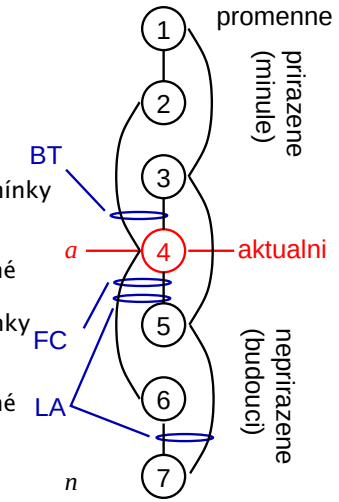
  $c(V_{a+1}, V_a), \ldots, c(V_n, V_a)$

  z budoucích proměnných do aktuální proměnné
- **Pohled dopředu (LA)** kontroluje v kroku a podmínky

  $\forall l(a \le l \le n), \forall k(a \le k \le n), k \ne l : c(V_k, V_l)$

  z budoucích proměnných do aktuální proměnné

  a mezi budoucími proměnnými



Cvičení

1. Jak vypadá stavový prostor řešení pro následující omezení

   A in 1..4, B in 3..4, C in 3..4, B #< C, A #= C

   při použití kontroly dopředu a uspořádání proměnných A,B,C? Popište, jaký typ propagace proběhne v jednotlivých uzlech.

2. Jak vypadá stavový prostor řešení pro následující omezení

   A in 1..4, B in 3..4, C in 3..4, B #< C, A #= C

   při použití pohledu dopředu a uspořádání proměnných A,B,C? Popište, jaký typ propagace proběhne v jednotlivých uzlech.

3. Jak vypadá stavový prostor řešení pro následující omezení

   domain([A,B,C],0,1), A #= B-1, C #= A*A

   při použití backtrackingu a pohledu dopředu a uspořádání proměnných A,B,C? Popište, jaký typ propagace proběhne v jednotlivých uzlech.

Cvičení

1. Jaká jsou pravidla pro konzistenci mezí u omezení X#= Y+5? Jaké typy propagací pak proběhnou v následujícím příkladě při použití konzistence mezí?

   X in 1..20, Y in 1..20, X #= Y + 5, Y #> 10.

2. Ukažte, jak je dosaženo hranové konzistence v následujícím příkladu:

   domain([X,Y,Z],1,5]), X #< Y, Z#= Y+1 .

Implementace Prologu

Literatura:

- Matyska L., Toman D.: Implementační techniky Prologu, Informační systémy, (1990), 21–59.
  `http://www.ics.muni.cz/people/matyska/vyuka/lp/lp.html`

Opakování: základní pojmy

- Konečná množina klauzulí `Hlava :- Tělo` tvoří **program P**.
- **`Hlava`** je literál
- **`Tělo`** je (eventuálně prázdná) konjunkce literálů $T_1, \ldots T_a$, $a \geq 0$
- **Literál**
  je tvořen m-árním predikátovým symbolem (m/p) a m termy (argumenty)
- **Term** je konstanta, proměnná nebo složený term.
- **Složený term**
  s n termy na místě argumentů
- **Dotaz (cíl)** je neprázdná množina literálů.

Interpretace

Deklarativní sémantika:

Hlava platí, platí-li jednotlivé literály těla.

Procedurální (imperativní) sémantika:

```
Entry: Hlava::
{
   call T1
   ⋮
   call Ta
}
```

Volání procedury s názvem `Hlava` uspěje, pokud uspěje volání všech procedur (literálů) v těle.

Procedurální sémantika = podklad pro implementaci

Abstraktní interpret

Vstup: Logický program P a dotaz G.

1. Inicializuj množinu cílů S literály z dotazu G; S:=G
2. `while ( S != empty ) do`
3. Vyber A∈S a dále vyber klauzuli A':-B_1,...,B_n $(n \geq 0)$ z programu P takovou, že $\exists\sigma : A\sigma = A'\sigma$; σ je nejobecnější unifikátor.
   Pokud neexistuje A' nebo σ, ukonči cyklus.
4. Nahraď A v S cíli B_1 až B_n.
5. Aplikuj σ na G a S.
6. `end while`
7. Pokud S==empty, pak výpočet úspěšně skončil a výstupem je G se všemi aplikovanými substitucemi.
   Pokud S!=empty, výpočet končí neúspěchem.

Abstraktní interpret – pokračování

Kroky (3) až (5) představují **redukci** (logickou inferenci) cíle A.

Počet redukcí za sekundu (LIPS) == indikátor výkonu implementace

Věta

Existuje-li instance G' dotazu G, odvoditelná z programu P v konečném počtu kroků, pak bude tímto interpretem nalezena.

Nedeterminismus interpetu

1. **Selekční pravidlo:** výběr cíle A z množiny cílů S
   - neovlivňuje výrazně výsledek chování interpretu
2. **Způsob prohledávání stromu výpočtu:** výběr klauzule A' z programu P
   - je velmi důležitý, všechny klauzule totiž nevedou k úspěšnému řešení

Vztah k úplnosti:

1. Selekční pravidlo neovlivňuje úplnost
   - možno zvolit libovolné v rámci SLD rezoluce
2. Prohledávání stromu výpočtu do šířky nebo do hloubky

„Prozření" – automatický výběr správné klauzule

- vlastnost abstraktního interpretu, kterou ale reálné interprety nemají

Prohledávání do šířky

1. Vybereme všechny klauzule A'_i, které je možno unifikovat s literálem A
   - nechť je těchto klauzulí q
2. Vytvoříme q kopií množiny S
3. V každé kopii redukujeme A jednou z klauzulí A'_i.
   - aplikujeme příslušný nejobecnější unifikátor
4. V následujících krocích redukujeme všechny množiny S_i současně.
5. Výpočet ukončíme úspěchem, pokud se alespoň jedna z množin S_i stane prázdnou.

- Ekvivalence s abstraktnímu interpretem
  - pokud jeden interpret neuspěje, pak neuspěje i druhý
  - pokud jeden interpret uspěje, pak uspěje i druhý

Prohledávání do hloubky

1. Vybereme všechny klauzule A'$_i$, které je možno unifikovat s literálem A.
2. Všechny tyto klauzule zapíšeme na zásobník.
3. Redukci provedeme s klauzulí na vrcholu zásobníku.
4. Pokud v nějakém kroku nenajdeme vhodnou klauzuli A', vrátíme se k předchozímu stavu (tedy anulujeme aplikace posledního unifikátoru σ) a vybereme ze zásobníku další klauzuli.
5. Pokud je zásobník prázdný, končí výpočet neúspěchem.
6. Pokud naopak zredukujeme všechny literály v S, výpočet končí úspěchem.

- Není úplné, tj. nemusí najít všechna řešení
- Nižší paměťová náročnost než prohledávání do šířky
- Používá se v Prologu

Reprezentace objektů

- Beztypový jazyk
- Kontrola „typů" za běhu výpočtu
- Informace o struktuře součástí objektu

Typy objektů

- **Primitivní objekty:**
  - konstanta
  - číslo
  - volná proměnná
  - odkaz (reference)
- **Složené (strukturované) objekty:**
  - struktura
  - seznam

Reprezentace objektů II

Příznaky (tags):

Objekt	Příznak
volná proměnná	FREE
konstanta	CONST
celé číslo	INT
odkaz	REF
složený term	FUNCT

Obsah adresovatelného slova: **hodnota** a **příznak**.

Primitivní objekty uloženy přímo ve slově

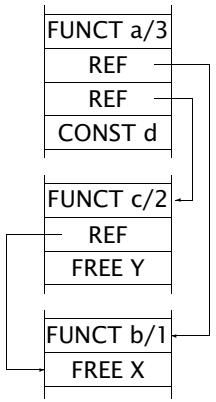
Složené objekty

- jsou instance termu ve zdrojovém textu, tzv. zdrojového termu
- zdrojový term bez proměnných $\Longrightarrow$ každá instanciace ekvivalentní zdrojovému termu
- zdrojový term s proměnnými $\Longrightarrow$ dvě instance se mohou lišit aktuálními hodnotami proměnných, jedinečnost zajišťuje kopírování struktur nebo sdílení struktur

Kopírování struktur

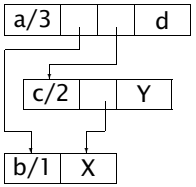
Příklad:

a(b(X),c(X,Y),d),



Kopírování struktur II

- Term F s aritou A reprezentován A+1 slovy:
  - funktor a arita v prvním slově
  - 2. slovo nese první argument (resp. odkaz na jeho hodnotu) ⁝
  - A+1 slovo nese hodnotu A-tého argumentu
- Reprezentace vychází z orientovaných acyklických grafů:



- Vykopírována každá instance ⇒ **kopírování struktur**
- Termy ukládány na **globální zásobník**

Sdílení struktur

- Vychází z myšlenky, že při reprezentaci je třeba řešit přítomnost proměnných
- Instance termu

  `< kostra_termu; rámec >`

  - `kostra_termu` je zdrojový term s očíslovanými proměnnými
  - `rámec` je vektor aktuálních hodnot těchto proměnných
    - i-tá položka nese hodnotu i-té proměnné v původním termu

Sdílení struktur II

Příklad:

`a(b(X),c(X,Y),d)`

reprezentuje

`< a(b($1),c($1,$2),d) ; [FREE, FREE] >`

kde symbolem `$i` označujeme i-tou proměnnou.

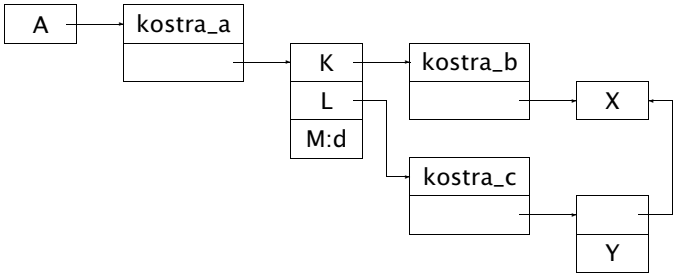
Implementace:

`< &kostra_termu; &rámec >` (& vrací adresu objektu)

Všechny instance sdílí společnou `kostru_termu` ⇒ **sdílení struktur**

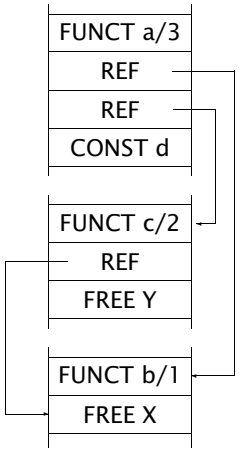
Srovnání: příklad

- Naivní srovnání: sdílení paměťově méně náročné
- Platí ale pouze pro rozsáhlé termy přítomné ve zdrojovém kódu
- Postupná tvorba termů:
  `A = a(K,L,M), K = b(X), L = c(X,Y), M = d`
  - Sdílení termů:



Srovnání: příklad – pokračování

- Kopírování struktur: `A = a(K,L,M), K = b(X), L = c(X,Y), M = d`



tj. identické jako přímé vytvoření termu `a(b(X),c(X,Y),d)`

Srovnání II

- **Složitost algoritmů pro přístup k jednotlivým argumentům**
  - sdílení struktur: nutná víceúrovňová nepřímá adresace
  - kopírování struktur: bez problémů
  - jednodušší algoritmy usnadňují i optimalizace
- **Lokalita přístupů do paměti**
  - sdílení struktur: přístupy rozptýleny po paměti
  - kopírování struktur: lokalizované přístupy
  - při stránkování paměti – rozptýlení vyžaduje přístup k více stránkám
- Z praktického hlediska neexistuje mezi těmito přístupy zásadní rozdíl

Řízení výpočtu

- **Dopředný výpočet**
  - po úspěchu (úspěšná redukce)
    - jednotlivá volání procedur skončí úspěchem
  - klasické volání rekurzivních procedur
- **Zpětný výpočet (backtracking)**
  - po neúspěchu vyhodnocení literálu (neúspěšná redukce)
    - nepodaří se unifikace aktuálních a formálních parametrů hlavy
  - návrat do bodu, kde zůstala nevyzkoušená alternativa výpočtu
    - je nutná obnova původních hodnot jednotlivých proměnných
    - po nalezení místa s dosud nevyzkoušenou klauzulí pokračuje dále dopředný výpočet

Aktivační záznam

- Volání (=aktivace) procedury
- Aktivace **sdílí společný kód**, liší se obsahem **aktivačního záznamu**
- Aktivační záznam uložen na **lokálním zásobníku**
- Dopředný výpočet
  - stav výpočtu v okamžiku volání procedury
  - aktuální parametry
  - lokální proměnné
  - pomocné proměnné (‘a la registry)
- Zpětný výpočet (backtracking)
  - hodnoty parametrů v okamžiku zavolání procedury
  - následující klauzule pro zpracování při neúspěchu

Aktivační záznam a roll-back

- Neúspěšná klauzule mohla nainstanciovat nelokální proměnné
  - `a(X) :- X = b(c,Y), Y = d.` `?- W = b(Z,e), a(W).` (viz instanciace Z)
- Při návratu je třeba obnovit (**roll-back**) původní hodnoty proměnných
- Využijeme vlastností logických proměnných
  - instanciovat lze pouze volnou proměnnou
  - jakmile proměnná získá hodnotu, nelze ji změnit jinak než návratem výpočtu

  $\Longrightarrow$ původní hodnoty všech proměnných odpovídají volné proměnné
- **Stopa** (trail): zásobník s adresami instanciovaných proměnných
  - ukazatel na aktuální vrchol zásobníku uchováván v aktivačním záznamu
  - při neúspěchu jsou hodnoty proměnných na stopě v úseku mezi aktuálním a uloženým vrcholem zásobníku změněny na „volná"
- **Globální zásobník**: pro uložení složených termů
  - ukazatel na aktuální vrchol zásobníku uchováván v aktivačním záznamu
  - při neúspěchu vrchol zásobníku snížen podle uschované hodnoty v aktivačním záznamu

Okolí a bod volby

Aktivační záznam úspěšně ukončené procedury nelze odstranit z lokálního zásobníku $\Longrightarrow$ **rozdělení aktivačního záznamu:**

- **okolí** (environment) – informace nutné pro dopředný běh programu
- **bod volby** (choice point) – informace nezbytné pro zotavení po neúspěchu
- ukládány na lokální zásobník
- samostatně provázány (odkaz na předchozí okolí resp. bod volby)

Důsledky:

- samostatná práce s každou částí aktivačního záznamu (optimalizace)
- alokace pouze okolí pro deterministické procedury
- možnost odstranění okolí po úspěšném vykonání (i nedeterministické) procedury (pokud okolí následuje po bodu volby dané procedury)
  - pokud je okolí na vrcholu zásobníku

Řez

- Prostředek pro ovlivnění běhu výpočtu programátorem
  - `a(X) :- b(X), !, c(X).` `a(3).`
    `b(1).` `b(2).`
    `c(1).` `c(2).`
- Řez: neovlivňuje dopředný výpočet, má vliv pouze na zpětný výpočet
- Odstranění alternativních větví výpočtu

  ⇒ odstranění odpovídajících bodů volby
  - tj. odstranění bodů volby mezi současným vrcholem zásobníku a bodem volby procedury, která řez vyvolala (včetně bodu volby procedury s řezem)

  ⇒ změna ukazatele na „nejmladší" bod volby

⇒ Vytváření deterministických procedur

⇒ Optimalizace využití zásobníku

Interpret Prologu

Základní principy:

- klauzule uloženy jako termy
- **programová databáze**
  - pro uložení klauzulí
  - má charakter haldy
    - umožňuje modifikovatelnost prologovských programů za běhu (`assert`)
- klauzule zřetězeny podle pořadí načtení
  - triviální zřetězení

Vyhodnocení dotazu: volání procedur řízené unifikací

Interpret – Základní princip

1. Vyber redukovaný literál („první", tj. nejlevější literál cíle)
2. Lineárním průchodem od začátku databáze najdi klauzuli, jejíž hlava má stejný funktor a stejný počet argumentů jako redukovaný literál
3. V případě nalezení klauzule založ bod volby procedury
4. Založ dále okolí první klauzule (velikost odvozena od počtu lokálních proměnných v klauzuli)
5. Proved' unifikaci literálu a hlavy klauzule
6. Úspěch ⇒ přidej všechny literály klauzule k cíli („doleva", tj. na místo redukovaného literálu). Tělo prázdné ⇒ výpočet se s úspěchem vrací do klauzule, jejíž adresa je v aktuálním okolí.
7. Neúspěch unifikace ⇒ z bodu volby se obnoví stav a pokračuje se v hledání další vhodné klauzule v databázi.
8. Pokud není nalezena odpovídající klauzule, výpočet se vrací na předchozí bod volby (krátí se lokální i globální zásobník).
9. Výpočet končí neúspěchem: neexistuje již bod volby, k němuž by se výpočet mohl vrátit.
10. Výpočet končí úspěchem, jsou-li úspěšně redukovány všechny literály v cíli.

Interpret – vlastnosti

- Lokální i globální zásobník
  - při dopředném výpočtu roste
  - při zpětném výpočtu se zmenšuje

  Lokální zásobník se může zmenšit při dopředném úspěšném výpočtu deterministické procedury.
- Unifikace argumentů hlavy – obecný unifikační algoritmus
  Současně poznačí adresy instanciovaných proměnných na stopu.
- „Interpret":

```
interpret(Query, Vars) :- call(Query), success(Query, Vars).
interpret(_,_) :- failure.
```

  - dotaz vsazen do kontextu této speciální nedeterministické procedury
  - tato procedura odpovídá za korektní reakci systému v případě úspěchu i neúspěchu

Optimalizace: Indexace

- Zřetězení klauzulí podle pořadí načtení velmi neefektivní
- Provázání klauzulí se stejným funktorem a aritou hlavy (tvoří jednu **proceduru**)
  - tj., **indexace procedur**
- Hash tabulka pro vyhledání první klauzule
- Možno rozhodnout (parciálně) determinismus procedury

Indexace argumentů

```
a(1) :- q(1).
a(a) :- b(X).
a([A|T]) :- c(A,T).
```

- Obecně nedeterministická
- Při volání s alespoň částečně instanciovaným argumentem vždy deterministická (pouze jedna klauzule může uspět)
- **Indexace podle prvního argumentu**

  Základní typy zřetězení:
  - podle pořadí klauzulí (aktuální argument je volná proměnná)
  - dle konstant (aktuální je argument konstanta)
  - formální argument je seznam (aktuální argument je seznam)
  - dle struktur (aktuální argument je struktura)

Indexace argumentů II

- Složitější indexační techniky
  - podle všech argumentů
  - podle nejvíce diskriminujícího argumentu
  - kombinace argumentů (indexové techniky z databází)
    - zejména pro přístup k faktům

Tail Recursion Optimization, TRO

Iterace prováděna pomocí rekurze ⇒ lineární paměťová náročnost cyklů

Optimalizace koncové rekurze *(Tail Recursion Optimisation)*, TRO:
Okolí se odstraní **před** rekurzivním voláním posledního literálu klauzule, pokud je klauzule resp. její volání deterministické.

Řízení se nemusí vracet:

- v případě úspěchu se rovnou pokračuje
- v případě neúspěchu se vrací na předchozí bod volby („nad" aktuální klauzulí)
  - aktuální klauzule nemá dle předpokladu bod volby

Rekurzivně volaná klauzule může být volána přímo z kontextu volající klauzule.

TRO – příklad

Program:

```
append([], L, L).
append([A|X], L, [A|Y]) :- append(X, L, Y).
```

Dotaz:

```
?- append([a,b,c], [x], L).
```

append volán rekurzivně 4krát

- bez TRO: 4 okolí, lineární paměťová náročnost
- s TRO: 1 okolí, konstatní paměťová náročnost

Optimalizace posledního volání

TRO pouze speciální případ

obecné **optimalizace posledního volání *(Last Call Optimization)*, LCO**

Okolí (před redukcí posledního literálu)

odstraňováno vždy, když leží na vrcholu zásobníku.

Nutné úpravy interpretu

- disciplina směrování ukazatelů
  - vždy „mladší" ukazuje na „starší" („mladší" budou odstraněny dříve)
  - z lokálního do globálního zásobníku

  vyhneme se vzniku „visících odkazů" při předčasném odstranění okolí
- „globalizace" lokálních proměnných: lokální proměnné posledního literálu
  - nutno přesunout na globální zásobník
  - pouze pro neinstanciované proměnné

Warrenův abstraktní počítač, WAM I.

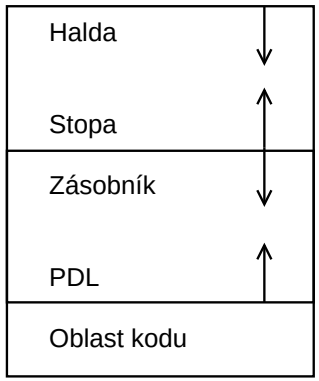
Navržen D.H.D. Warrenem v roce 1983, modifikace do druhé poloviny 80. let

Datové oblasti:

- **Oblast kódu** (programová databáze)
  - separátní oblasti pro uživatelský kód (modifikovatelný) a vestavěné predikáty (nemění se)
  - obsahuje rovněž všechny statické objekty (texty atomů a funktorů apod.)
- **Lokální zásobník** ***(Stack)***
- **Stopa** ***(Trail)***
- **Globální zásobník n. halda*****(Heap)***
- **Pomocný zásobník** ***(Push Down List, PDL)***
  - pracovní paměť abstraktního počítače
  - použitý v unifikaci, syntaktické analýze apod.

Rozmístění datových oblastí

- Příklad konfigurace



- Halda i lokální zásobník musí růst stejným směrem
  - lze jednoduše porovnat stáří dvou proměnných srovnáním adres
    využívá se při zabránění vzniku visících odkazů

Registry WAMu

- **Stavové registry**:
  - **P** čitač adres (**P**rogram counter)
  - **CP** adresa návratu (**C**ontinuation **P**ointer)
  - **E** ukazatel na nejmladší okolí (**E**nvironment)
  - **B** ukazatel na nejmladší bod volby (**B**acktrack point)
  - **TR** vrchol stopy (**TR**ail)
  - **H** vrchol haldy (**H**eap)
  - **HB** vrchol haldy v okamžiku založení posledního bodu volby (**H**eap on **B**acktrack point)
  - **S** ukazatel, používaný při analýze složených termů (**S**tructure pointer)
  - **CUT** ukazatel na bod volby, na který se řezem zařízne zásobník
- **Argumentové registry**: `A1,A2,...` (při předávání parametrů n. pracovní registry)
- **Registry pro lokální proměnné**: `Y1,Y2,...`
  - abstraktní znázornění lok. proměnných na zásobníku

Typy instrukcí WAMu

- **`put` instrukce** – příprava argumentů před voláním podcíle
  - žádná z těchto instrukcí nevolá obecný unifikační algoritmus
- **`get` instrukce** – unifikace aktuálních a formálních parametrů
  - vykonávají činnost analogickou instrukcím `unify`
  - obecná unifikace pouze při `get_value`
- **`unify` instrukce** – zpracování složených termů
  - jednoargumentové instrukce, používají registr S jako druhý argument
  - počáteční hodnota S je odkaz na `1.` argument
  - volání instrukce `unify` zvětší hodnotu S o jedničku
  - obecná unifikace pouze při `unify_value` a `unify_local_value`
- **Indexační instrukce** – indexace klauzulí a manipulace s body volby
- **Instrukce řízení běhu** – předávání řízení a explicitní manipulace s okolím

Instrukce put a get: příklad

Příklad: `a(X,Y,Z) :- b(f,X,Y,Z).`

```
get_var     A1,A5
get_var     A2,A6
get_var     A3,A7
put_const   A1,f
put_value   A2,A5
put_value   A3,A6
put_value   A4,A7
execute     b/4
```


WAM – optimalizace

1. Indexace klauzulí
2. Generování optimální posloupnosti instrukcí WAMu
3. Odstranění redundancí při generování cílového kódu.

- Příklad: `a(X,Y,Z) :- b(f,X,Y,Z).`

  naivní kód (vytvoří kompilátor pracující striktně zleva doprava) vs.
  optimalizovaný kód (počet registrů a tedy i počet instrukcí/přesunů v paměti snížen):

```
get_var     A1,A5           |     get_var     A3,A4
get_var     A2,A6           |     get_var     A2,A3
get_var     A3,A7           |     get_var     A1,A2
put_const   A1,f            |     put_const   A1,f
put_value   A2,A5           |     execute     b/4
put_value   A3,A6           |
put_value   A4,A7           |
execute     b/4             |
```


Instrukce WAMu

`get` **instrukce**		`put` **instrukce**		`unify` **instrukce**	
`get_var`	`Ai,Y`	`put_var`	`Ai,Y`	`unify_var`	`Y`
`get_value`	`Ai,Y`	`put_value`	`Ai,Y`	`unify_value`	`Y`
`get_const`	`Ai,C`	`put_unsafe_value`	`Ai,Y`	`unify_local_value`	`Y`
`get_nil`	`Ai`	`put_const`	`Ai,C`	`unify_const`	`C`
`get_struct`	`Ai,F/N`	`put_nil`	`Ai`	`unify_nil`	
`get_list`	`Ai`	`put_struct`	`Ai,F/N`	`unify_void`	`N`
		`put_list`	`Ai`		

instrukce řízení		**indexační instrukce**			
`allocate`		`try_me_else`	`Next`	`try`	`Next`
`deallocate`		`retry_me_else`	`Next`	`retry`	`Next`
`call`	`Proc/N,A`	`trust_me_else`	`fail`	`trust`	`fail`
`execute`	`Proc/N`				
`proceed`		`cut_last`		`switch_on_term`	`Var,Const,List,Struct`
		`save_cut Y`		`switch_on_const`	`Table`
		`load_cut Y`		`switch_on_struct`	`Table`

WAM – indexace

- Provázání klauzulí: instrukce `XX_me_else`:
  - první klauzule: `try_me_else`; založí bod volby
  - poslední klauzule: `trust_me_else`; zruší nejmladší bod volby
  - ostatní klauzule: `retry_me_else`; znovu použije nejmladší bod volby po neúspěchu
- Provázání podmnožiny klauzulí (podle argumentu):
  - `try`
  - `retry`
  - `trust`
- „Rozskokové" instrukce (dle typu a hodnoty argumentu):
  - `switch_on_term Var, Const, List, Struct`
    výpočet následuje uvedeným návěstím podle typu prvního argumentu
  - `switch_on_YY`: hashovací tabulka pro konkrétní typ (konstanta, struktura)

Příklad indexace instrukcí

Procedure

```
a(atom) :- body1.
a(1) :- body2.
a(2) :- body3.
a([X|Y]) :- body4.
a([X|Y]) :- body5.
a(s(N)) :- body6.
a(f(N)) :- body7.
```

odpovídají instrukce

```
a:    switch_on_term L1, L2, L3, L4
L2:   switch_on_const  atom :L1a
                       1    :L5a
                       2    :L6a
L3:   try              L7a
      trust            L8a
L4:   switch_on_struct s/1  :L9a
                       f/1  :L10a
L1:   try_me_else L5
L1a:  body1
L5:   retry_me_else L6
L5a:  body2
L6:   retry_me_else L7
L6a:  body3
L7:   retry_me_else L8
L7a:  body4
L8:   retry_me_else L9
L8a:  body5
L9:   retry_me_else L10
L9a:  body6
L10:  trust_me_else fail
L10a: body7
```


WAM – řízení výpočtu

- `execute Proc`: ekvivalentní příkazu goto
- `proceed`: zpracování faktů
- `allocate`: alokuje okolí (pro některé klauzule netřeba, proto explicitně generováno)
- `deallocate`: uvolní okolí (je-li to možné, tedy leží-li na vrcholu zásobníku)
- `call Proc,N`: zavolá Proc, N udává počet lok. proměnných (odpovídá velikosti zásobníku)
  Možná optimalizace: vhodným uspořádáním proměnných
  lze dosáhnout postupného zkracování lokálního zásobníku

```
a(A,B,C,D) :- b(D), c(A,C), d(B), e(A), f.
```

generujeme instrukce

```
allocate
call b/1,4
call c/2,3
call d/1,2
call e/1,1
deallocate
execute f/0
```


WAM – řez

Implementace řezu (opakování): odstranění bodů volby mezi současným vrcholem zásobníku a bodem volby procedury, která řez vyvolala (včetně bodu volby procedury s řezem)

Indexační instrukce znemožňují v době překladu rozhodnout, zda bude alokován bod volby

- příklad: `?- a(X).` může být nedeterministické, ale `?- a(1).` může být deterministické

```
cut_last:   B := CUT        save_cut Y:   Y := CUT        load_cut Y:   B := Y
```

Hodnota registru B je uchovávána v registru CUT instrukcemi `call` a `execute`.
Je-li řez prvním predikátem klauzule, použije se rovnou `cut_last`. V opačném případě se použije jako první instrukce `save_cut Y` a v místě skutečného volání řezu se použije `load_cut Y`.

Příklad:

```
a(X,Z) :- b(X), !, c(Z).
a(2,Z) :- !, c(Z).
a(X,Z) :- d(X,Z).
```

odpovídá

```
save_cut Y2; get A2,Y1; call b/1,2; load_cut Y2; put Y1,A1; execute c/1
get_const A1,2; cut_last; put A2,A1; execute c/1
execute d/2
```