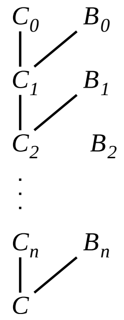
Rezoluce a logické programování

Lineární rezoluce

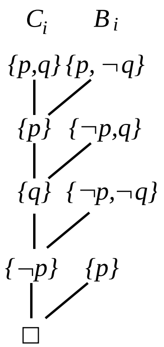
- varianta rezoluční metody
  - snaha o generování lineární posloupnosti místo stromu
  - v každém kroku kromě prvního můžeme použít bezprostředně předcházející rezolventu a k tomu buď některou z klauzulí vstupní množiny S nebo některou z předcházejících rezolvent
- **lineární rezoluční důkaz** C **z** S je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0\rangle, \ldots \langle C_n, B_n\rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - C_0 a každá B_i jsou prvky S nebo některé $C_j, j < i$
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i
- **lineární vyvrácení** S = lineární rezoluční důkaz $\square$ z S



Lineární rezoluce II.

- příklad: $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

  $A_1 = \{p, q\}$
  $A_2 = \{p, \neg q\}$
  $A_3 = \{\neg p, q\}$
  $A_4 = \{\neg p, \neg q\}$



- S: **vstupní množina** klauzulí
- C_i: **střední klauzule**
- B_i: **boční klauzule**

Prologovská notace

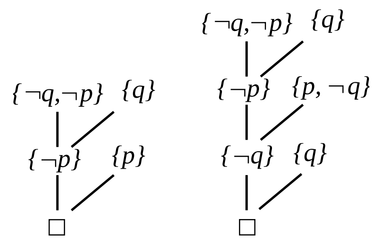
- Klauzule v matematické logice
  - $\{H_1, \cdots, H_m, \neg T_1, \cdots, \neg T_n\}$ $\quad H_1 \vee \cdots \vee H_m \vee \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$
- **Hornova klauzule**: nejvýše jeden pozitivní literál
  - $\{H, \neg T_1, \ldots, \neg T_n\}$ $\quad \{H\}$ $\quad \{\neg T_1, \ldots, \neg T_n\}$
  - $H \vee \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$ $\quad H$ $\quad \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$
- **Pravidlo**: jeden pozitivní a alespoň jeden negativní literál
  - Prolog: $H : - T_1, \cdots, T_n.$ Matematická logika: $H \Leftarrow T_1 \wedge \cdots \wedge T_n$
  - $H \Leftarrow T$ $\quad H \vee \neg T$ $\quad H \vee \neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$ Klauzule: $\{H, \neg T_1, \ldots, \neg T_n\}$
- **Fakt**: pouze jeden pozitivní literál
  - Prolog: $H.$ Matematická logika: H Klauzule: $\{H\}$
- **Cílová klauzule**: žádný pozitivní literál
  - Prolog: $: - T_1, \ldots T_n.$ Matematická logika: $\neg T_1 \vee \cdots \vee \neg T_n$ Klauzule: $\{\neg T_1, \cdots \neg T_n\}$

Logický program

- **Programová klauzule**: právě jeden pozitivní literál (fakt nebo pravidlo)
- **Logický program**: konečná množina programových klauzulí
- Příklad:
  - logický program jako množina klauzulí:
    $P = \{P_1, P_2, P_3\}$
    $P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
  - logický program v prologovské notaci:
    $p.$
    $p :- q.$
    $q.$
  - cílová klauzule: $G = \{\neg q, \neg p\} \qquad :- q, p.$

Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí P
- $G = \{\neg q, \neg p\} \qquad P = \{P_1, P_2, P_3\}: \quad P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
- $:- q, p. \qquad p. \qquad p :- q, \qquad q.$



- **Střední klauzule jsou cílové klauzule**

Lineární vstupní rezoluce

- **Vstupní rezoluce na** $P \cup \{G\}$
  - (opakování:) alespoň jedna z klauzulí použitá při rezoluci je z výchozí vstupní množiny
  - začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
  - boční klauzule jsou vždy z P (tj. jsou to programové klauzule)
- (Opakování:) **Lineární rezoluční důkaz** C **z** P je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0\rangle, \dots \langle C_n, B_n\rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - C_0 a každá B_i jsou prvky P **nebo některé** $C_j, j < i$
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i
- **Lineární vstupní (*Linear Input*) rezoluce (LI-rezoluce)** C z $P \cup \{G\}$ posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0\rangle, \dots \langle C_n, B_n\rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - $C_0 = G$ **a každá** B_i **jsou prvky** P — lineární rezoluce + vstupní rezoluce
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály
- **Věta:** Existuje-li rezoluční důkaz prázdné množiny z množiny S Hornových klauzulí, pak tento rezoluční strom má v listech **jedinou cílovou klauzuli**.
  - pokud začnu důkaz pravidlem a faktem, pak dostanu zase pravidlo
  - pokud začnu důkaz dvěma pravidly, pak dostanu zase pravidlo
  - na dvou faktech rezolvovat nelze

  ⇒ dokud nepoužiji cíl pracuji stále s množinou faktů a pravidel
  - pokud použiji v důkazu cílovou klauzuli,
    fakta mi ubírají negat.literály, pravidla mi je přidávají,
    v rezolventě mám stále samé negativní literály, tj. nelze rezolvovat s dalším cílem

Korektnost a úplnost

- **Věta:** Množina S Hornových klauzulí je nesplnitelná, právě když existuje rezoluční vyvrácení S pomocí **vstupní rezoluce**.
- **Korektnost** platí stejně jako pro ostatní omezení rezoluce
- **Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  Nechť P je množina programových klauzulí a G cílová klauzule.
  Je-li množina $P \cup \{G\}$ Hornových klauzulí nesplnitelná,
  pak existuje rezoluční vyvrácení $P \cup \{G\}$ pomocí LI-rezoluce.
  - vstupní rezoluce pro (obecnou) formuli sama o sobě není úplná
    $\Longrightarrow$ LI-rezoluce aplikovaná na (obecnou) formuli nezaručuje, že nalezeneme důkaz, i když formule platí!
- **Význam LI-rezoluce pro Hornovy klauzule:**
  - $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, $G = \{G_1, \dots, G_m\}$
  - LI-rezolucí ukážeme nesplnitelnost $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge (\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$
  - pokud tedy předpokládáme, že program $\{P_1, \dots, P_n\}$ platí, tak musí být nepravdivá $(\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$, tj. musí platit $G_1 \wedge \cdots \wedge G_m$

Uspořádané klauzule (*definite clauses*)

- Klauzule = množina literálů
- **Uspořádáná klauzule (*definite clause*) = posloupnost literálů**
  - nelze volně měnit pořadí literálů
- **Rezoluční princip pro uspořádané klauzule**:

$$\frac{\{\neg A_0, \dots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \dots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \dots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \dots, \neg A_n\}\sigma}$$

  - **uspořádaná rezolventa**: $\{\neg A_0, \dots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \dots, \neg A_n\}\sigma$
  - ρ je přejmenování proměnných takové, že klauzule $\{A_0, \dots, A_n\}$ a $\{B, B_0, \dots, B_m\}\rho$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor pro A_i a $B\rho$
  - **rezoluce je realizována na literálech** $\neg A_i\sigma$ **a** $B\rho\sigma$
  - je dodržováno pořadí literálů, tj.
    $\{\neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho\}\sigma$ **jde do uspořádané rezolventy přesně na pozici** $\neg A_i\sigma$

Uspořádané klauzule II.

- Uspořádáné klauzule

$$\frac{\{\neg A_0, \dots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \dots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \dots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \dots, \neg A_n\}\sigma}$$

  Hornovy klauzule

$$\frac{:- A_0, \dots, A_n. \qquad B :- B_0, \dots, B_m.}{:- (A_0, \dots, A_{i-1}, B_0\rho, \dots, B_m\rho, A_{i+1}, \dots, A_n)\sigma.}$$

- Příklad:

$$\frac{\{\neg s(X), \neg t(1), \neg u(X)\} \qquad \{t(Z), \neg q(Z,X), \neg r(3)\}}{\{\neg s(X), \neg q(1,A), \neg r(3), \neg u(X)\}}$$

$$\frac{:- s(X), t(1), u(X). \qquad t(Z) :- q(Z,X), r(3).}{:- s(X), q(1,A), r(3), u(X).}$$

$$\rho = [X/A] \qquad \sigma = [Z/1]$$

LD-rezoluce

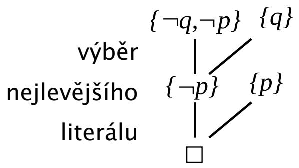
- **LD-rezoluční vyvrácení** množiny uspořádaných klauzulí $P \cup \{G\}$ je posloupnost $\langle G_0, C_0\rangle, \dots, \langle G_n, C_n\rangle$ taková, že
  - G_i, C_i jsou uspořádané klauzule
  - $G = G_0$
  - $G_{n+1} = \Box$
  - G_i je uspořádaná cílová klauzule
  - C_i je přejmenování klauzule z P
    - C_i neobsahuje proměnné, které jsou v $G_j, j \le i$ nebo v $C_k, k \le i$
  - $G_{i+1}, 0 \le i \le n$ je uspořádaná rezolventa G_i a C_i
- LD-rezoluce: korektní a úplná

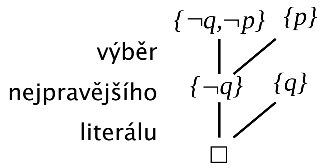
SLD-rezoluce

- **Lineární rezoluce se selekčním pravidlem = SLD-rezoluce (*Selected Linear resolution for Definite clauses*)**
  - rezoluce
  - **Selekční** pravidlo
  - **Lineární** rezoluce
  - **Definite** (uspořádané) klauzule
  - vstupní rezoluce
- **Selekční pravidlo** R je funkce, která každé neprázdné klauzuli C přiřazuje nějaký z jejích literálů $R(C) \in C$
  - při rezoluci vybírám z klauzule literál určený selekčním pravidlem
- Pokud se R neuvádí, pak se předpokládá výběr **nejlevějšího literálu**
  - nejlevější literál vybírá i Prolog

Lineární rezoluce se selekčním pravidlem

- $P = \{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}, \quad G = \{\neg q, \neg p\}$



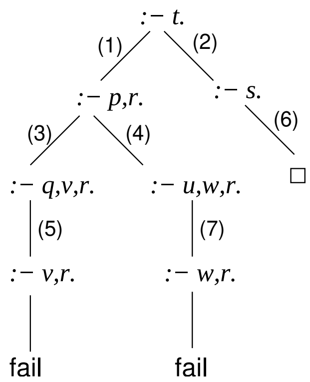


- **SLD-rezoluční vyvrácení** $P \cup \{G\}$ pomocí selekčního pravidla R je LD-rezoluční vyvrácení $\langle G_0, C_0\rangle, \ldots, \langle G_n, C_n\rangle$ takové, že $G = G_0, G_{n+1} = \square$ a $R(G_i)$ je literál rezolvovaný v kroku i
- SLD-rezoluce – korektní, úplná
- Efektivita SLD-rezoluce je závislá na
  - selekčním pravidle R
  - způsobu výběru příslušné programové klauzule pro tvorbu rezolventy
    - v Prologu se vybírá vždy klauzule, která je v programu první

Příklad: SLD-strom

$t :- p, r.$	(1)
$t :- s.$	(2)
$p :- q, v.$	(3)
$p :- u, w.$	(4)
$q.$	(5)
$s.$	(6)
$u.$	(7)

$:- t.$

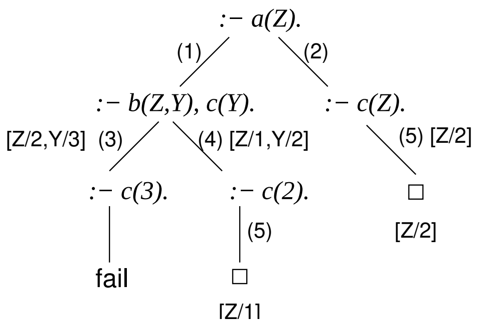


Strom výpočtu (SLD-strom)

- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu P vzhledem k cíli G
- kořenem stromu je cílová klauzule G
- v uzlech stromu jsou rezolventy (rodiče uzlu a programové klauzule)
  - číslo vybrané programové klauzule pro rezoluci je v příkladu uvedeno jako ohodnocení hrany
- listy jsou dvojího druhu:
  - označené prázdnou klauzulí – jedná se o **úspěšné uzly** (*succes nodes*)
  - označené neprázdnou klauzulí – jedná se o **neúspěšné uzly** (*failure nodes*)
- úplnost SLD-rezoluce zaručuje **existenci** cesty od kořene k úspěšnému uzlu pro každý možný výsledek příslušející cíli G

Příklad: SLD–strom a výsledná substituce

$:-a(Z).$



$a(X):-b(X,Y),c(Y).$ (1)
$a(X):-c(X).$ (2)
$b(2,3).$ (3)
$b(1,2).$ (4)
$c(2).$ (5)

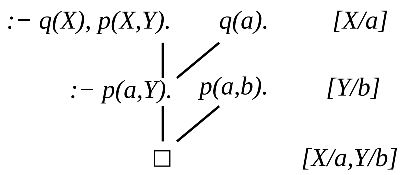
Cvičení:

$p(B):-q(A,B),r(B).$ ve výsledné substituci jsou pouze proměnné z dotazu
$p(A):-q(A,A).$ výsledné substituce jsou $[Z/1]$ a $[Z/2]$
$q(a,a).$ nezajímá mě substituce $[Y/2]$
$q(a,b).$
$r(b).$

Výsledná substituce (*answer substitution*)

q(a).
p(a,b).

:−q(X), p(X,Y).
X=a, Y=b



- Každý krok SLD-rezoluce vytváří novou unifikační substituci θ_i
  ⇒ potenciální instanciace proměnné ve vstupní cílové klauzuli
- **Výsledná substituce** (*answer substitution*)

$$\theta = \theta_0\theta_1 \cdots \theta_n \qquad \text{složení unifikací}$$

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P programových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

  (1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$
  kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G
  nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

  (2) $P \vdash \neg G$

  (3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

  a jedná se tak o **důkaz existence vhodných objektů**, které na základě vlastností množiny P splňují konjunkci literálů v cílové klauzuli
- Důkaz nesplnitelnosti $P \cup \{G\}$ znamená **nalezení protipříkladu**
  ten pomocí SLD-stromu **konstruuje termy (odpověď)** splňující konjunkci v (3)