Kapitola 1

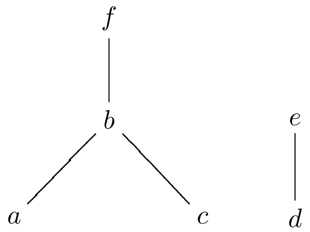
Relace uspořádání

1. Nakreslete Hasseův diagram následujících relací uspořádání (ověřte si, že se jedná o uspořádání).

   (a) $\subseteq = \{(1,2),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

   (b) $\prec = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,1),(1,3),(2,3)\}$

2. Vypište prvky uspořádání daného Hasseovým diagramem.



3. Dejte příklad uspořádané množiny $(X, \leq)$ a prvku $x \in X$ tak, že x není maximální, ani minimální, ani nejmenší, ani největší.

4. Dejte příklad konečné uspořádané množiny, která nemá nejmenší ani největší prvek.

5. Dejte příklad konečné uspořádané množiny, která má minimální prvek, ale nemá nejmenší.

6. Uspořádejte množinu $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ tak, aby měla práve tři minimální a dva maximální prvky.

7. Dejte příklad uspořádané množiny, která má čtyři prvky a každý z nich je minimální a zároveň maximální.

8. Dejte příklad uspořádané množiny, která má tři minimální prvky, ale nemá maximální prvek.

9. Uspořádejte $\mathbb{N}$ tak, aby
   (a) měla největší prvek.
   (b) neměla ani minimální, ani maximální prvek.

Kapitola 2

Zobrazení

1. Najděte zobrazení $\psi \subseteq X \times Y$, pro které ψ^{-1} není zobrazení množiny Y do množiny X.

2. Najděte zobrazení množiny $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$, které je

   (a) injektivní, ale není surjektivní.

   (b) surjektivní, ale není injektivní.

3. Mějme množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{p, q, r, s\}$. Najděte $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to A$ tak, aby

   (a) $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

   (b) $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

4. Zadávají následující předpisy zobrazení? Pokud ano, jsou injektivní nebo surjektivní (nebo bijekce)?

   (a) $f\colon \mathbb{Z} \to (0, 1)$ dané předpisem $f(x) = |x|$.

   (b) $f\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$ dané předpisem $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 1, \\ 2 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$

   (c) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané předpisem $f(x) = 3x$.

   (d) $f\colon \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4\}$, přičemž $f(x)$ udává zbytek čísla x po dělení číslem 5.

   (e) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané předpisem $f(x) = (x - 1)^2 + 1$.

   (f) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dané předpisem $f(x) = \begin{cases} y & \text{pokud } (y-1)^2 + 1 = x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

   (g) $f\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dané předpisem $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pro } x \text{ liché}, \\ x - 1 & \text{pro } x \text{ sudé}. \end{cases}$

(h) $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathrm{P}(\mathbb{Z})$ dané předpisem $f((x,y)) = \{x,y\}$.

(i) $f\colon \mathrm{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}$ dané předpisem $f(X) = |X|$.

(j) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = \frac{3x-4}{2x}$.

5. Určete jádro zobrazení $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ přiřazující číslu x největší celé číslo menší nebo rovné x.

6. Najděte předpis nějaké bijekce $f\colon \mathrm{P}(Q) \to 2^Q$.

7. Mějme zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisy $f(x) = x^2 - 1$ a $g(x) = 5x + 3$. Najděte předpis pro zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$, g^{-1} a $f \circ g^{-1}$.