

IB112 Základy matematiky

Řešení soustavy lineárních rovnic, matice, vektory

Jan Strejček

- *Soustava lineárních rovnic*
- *Vektor a matice*
 - násobení matic
 - maticový zápis soustavy lineárních rovnic
 - schodovitý tvar
- *Řešení soustavy lineárních rovnic*
 - Gaussova eliminace
 - Zpětná substituce
- *Geometrický význam lineárních rovnic*
 - s dvěma neznámými
 - s třemi neznámými

Soustava lineárních rovnic

Definice (Lineární rovnice)

Lineární rovnici o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n rozumíme rovnicí tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

kde a_1, a_2, \dots, a_n jsou *koeficienty* a b je *absolutní člen*.

Příklad

■ $x + 3 = 2y - 4 \quad \longrightarrow \quad x - 2y = -7$

■ lze chápat i jako rovnicí nad 3 neznámými: $x - 2y + 0z = -7$

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Je-li dáno m rovnic o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n , hovoříme o *soustavě lineárních rovnic* nebo *systému lineárních rovnic*.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Řešením soustavy rozumíme n -tici čísel (u_1, u_2, \dots, u_n) , po jejichž dosazení za proměnné (x_1, x_2, \dots, x_n) se levá strana každé rovnice vyhodnotí na odpovídající pravou stranu.

Příklad

$$\begin{array}{rclcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array}$$

Příklad

$$\begin{array}{rclcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array}$$

Řešení

- Soustava má jediné řešení $(5, 1, -2)$.
- Jinak zapsáno: $x = 5, y = 1, z = -2$

Motivační příklad 2

Příklad

$$2x - 3y = 7$$

$$x + 2z = 1$$

$$3x - 3y + 2z = 8$$

Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 8 \end{array}$$

Řešení

- Soustava má řešení $(5, 1, -2)$.
- Existují další řešení: $(-1, -3, 1)$, $(2, -1, -\frac{1}{2})$, $(11, 5, -5)$, ...

Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 8 \end{array}$$

Řešení

- Soustava má řešení $(5, 1, -2)$.
- Existují další řešení: $(-1, -3, 1)$, $(2, -1, -\frac{1}{2})$, $(11, 5, -5)$, ...
- Řešením je každá trojice $(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2})$, kde t je libovolné.
- Řešení je tedy nekonečně mnoho.
- Tato situace obvykle nastává, je-li rovnic méně než proměnných (v tomto příkladu třetí rovnice nepřidává žádnou informaci, je pouze součtem prvních dvou rovnic).

Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 9 \end{array}$$

Motivační příklad 3

Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 9 \end{array}$$

Řešení

- Neexistuje žádné řešení: součtem prvních dvou rovnic dostáváme

$$3x - 3y + 2z = 8,$$

což odporuje třetí rovnici.

- Vyřešením soustavy rovnic rozumíme nalezení **všech** řešení.
- Obvyklým postupem je převod soustavy na jednodušší soustavu se stejnou množinou řešení.

Definice (Ekvivalence soustav lineárních rovnic)

*Soustavy lineárních rovnic se nazývají **ekvivalentní**, mají-li stejnou množinu řešení.*

Následujícími úpravami získáme vždy ekvivalentní soustavu lineárních rovnic:

- 1 výměna libovolných dvou rovnic soustavy
- 2 vynásobení obou stran libovolné rovnice nenulovým číslem c
- 3 přičtení c -násobku i -té rovnice k j -té rovnici ($i \neq j$)

Každá z uvedených úprav je vratná. Původní soustavu dostaneme

- 1 opakováním výměny rovnic.
- 2 vynásobením stejné rovnice číslem $\frac{1}{c}$.
- 3 k j -té rovnici přičteme $(-c)$ -násobek i -té rovnice.

Obecně nelze kombinovat více úprav v jednom kroku (mohlo by to vést k neekvivalentní soustavě rovnic):

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & +3y & +2z = 14 \end{array}$$

Současným přičtením 2. rovnice k 3. a 3. rovnice k 2. dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ 4x & +3y & +4z = 15 \\ 4x & +3y & +4z = 15 \end{array}$$

Tato soustava není ekvivalentní: původní soustava má jedno řešení, upravená soustava jich má nekonečně mnoho.

Vektory a matice

Definice (Vektor)

Vektor je uspořádaná n -tice prvků.

- Vektor se zapisuje do řádku či do sloupce jedním z následujících způsobů (vpravo jsou *sloupcové vektory*):

$$\begin{array}{cccc} (-3, 2, 8) & (-3 & 2 & 8) & \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ (x_1, x_2, x_3) & (x_1 & x_2 & x_3) & & \end{array}$$

- Vektory stejného typu lze sčítat po složkách:

$$(-3, 2, 8) + (5, -5, 0) = (2, -3, 8)$$

- Násobení vektoru číslem:

$$5 \cdot (-3, 2, 8) = (-15, 10, 40)$$

Definice (Matice)

Maticí typu m/n rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Zápis $A = (a_{ij})$ znamená, že prvky matice A označujeme jmény tvaru a_{ij} dle uvedeného schématu.

Definice (Součin matic)

Součinem matic $A = (a_{ij})$ typu m/n a $B = (b_{jk})$ typu n/o je matice $C = (c_{ik})$ typu m/o splňující

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

Definice (Součin matic)

Součinem matic $A = (a_{ij})$ typu m/n a $B = (b_{jk})$ typu n/o je matice $C = (c_{ik})$ typu m/o splňující

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -11 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Ize zapsat pomocí matic následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Označíme-li matici a vektory pořadě A , x , b , dostáváme rovnici

$$A \cdot x = b.$$

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic lze ještě úsporněji reprezentovat tzv. *rozšířenou maticí soustavy*:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Příklad

$$\begin{array}{rclcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 14 \end{array} \right)$$

Schodovitý tvar matice

Definice (Schodový tvar matice)

Vedoucí prvek i -tého řádku matice je největší nenulový prvek na i -tém řádku (nulový řádek nemá vedoucí prvek). Matice je v (řádkově) schodovitém tvaru, jestliže

- 1 za nulovým řádkem následují už jen nulové řádky a
- 2 vedoucí prvek v každém nenulovém řádku je v pravějším sloupci než vedoucí prvky všech předcházejících řádků.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Vedoucí prvky jsou červené.
- Pouze matice vlevo je ve schodovitém tvaru.

Řešení soustavy lineárních rovnic

Dříve zmíněné úpravy soustavy lineárních rovnic, které zachovávají ekvivalenci, přesně odpovídají následujícím *elementárním řádkovým transformacím* provedeným na rozšířené matici soustavy.

Definice (Elementární řádkové transformace)

Elementární řádkové transformace matic jsou

- 1 *výměna dvou řádků matice,*
- 2 *vynásobení jednoho řádku nenulovým číslem,*
- 3 *přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.*

Věta (Gaussova eliminace)

Každou matici lze pomocí konečně mnoha elementárních řádkových úprav převést na řádkově schodovitý tvar.

Důkaz

Převod do schodovitého tvaru lze provést následujícím algoritmem.

- 1 Nechť j -tý sloupec je nejlevější nenulový sloupec matice. Vyměníme řádky tak, aby na prvním řádku byl v j -tém sloupci nenulový prvek a_{1j} .
- 2 K ostatním řádkům, které mají v tomto sloupci nenulový prvek a_{ij} přičteme $(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}})$ -násobek prvního řádku. Tím vynulujeme celý j -tý sloupec až na a_{1j} .
- 3 Tím jsme dostali první řádek do požadovaného tvaru. Opakovanou aplikací kroků 1 a 2 na zbylé řádky převedeme matici do požadovaného tvaru. □

Řešení soustavy lineárních rovnic

Postupujeme následovně:

- 1 Zapišeme soustavu pomocí rozšířené matice soustavy $(A | b)$.
- 2 Rozšířenou matici převedeme Gaussovou eliminací na matici $(A' | b')$ ve schodovitém tvaru. Jelikož eliminace používá pouze elementární úpravy, reprezentuje výsledná rozšířená matice ekvivalentní soustavu lineárních rovnic.
- 3 Z rozšířené matice $(A' | b')$ vyčteme kolik řešení má soustava rovnic. Rozlišujeme tři situace:
 - Matice $(A' | b')$ obsahuje řádek tvaru $(0 \ 0 \ \dots \ 0 | k)$, kde k je nenulové číslo. Tento řádek odpovídá rovnici $0 = k$ a soustava proto nemá řešení. V opačných případech soustava má řešení a nastává jeden z následujících případů.
 - Matice A' má v každém sloupci nějaký vedoucí prvek. Pak má soustava právě jedno řešení.
 - V matici A' existuje sloupec, ve kterém není vedoucí prvek. Pak má soustava nekonečně mnoho řešení.
- 4 Řešení spočítáme pomocí tzv. *zpětné substituce*.

Zpětná substituce

- Nechť $(A' | b')$ je matice ve schodovitém tvaru neobsahující řádek tvaru $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ k)$ s nenulovým k .
- Proměnné odpovídající sloupcům matice A' bez vedoucího prvku nahradíme parametrem. Tyto proměnné mohou nabývat libovolné hodnoty. Hodnoty ostatních proměnných jsou v každém řešení závislé na konkrétních hodnotách parametrů.
- Každý neprázdný řádek

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ a'_{ij} \ a'_{i(j+1)} \ \dots \ a'_{in} \ | \ b'_i)$$

převédeme na rovnici

$$x_j = \frac{1}{a'_{ij}} \cdot (b'_i - a'_{i(j+1)}x_{j+1} \ \dots \ - a'_{in}x_n)$$

tyto rovnice postupně odspodu řešíme dosazením níže spočítaných hodnot a parametrů.

Příklad 1

$$2x_1 - 3x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9$$

Příklad 1

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 9 \end{array} \right)$$

Příklad 1

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 9 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 9 \end{array} \right) \quad \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

- Uvedená soustava lineárních rovnic nemá řešení.

Příklad 2

$$2x_1 - 3x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8$$

Příklad 2

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

Příklad 2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 8 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right) \quad \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Příklad 2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 8 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = \frac{1}{-3}(5 + 4x_3) \end{array}$$

Příklad 2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 8 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = \frac{1}{-3}(5 + 4x_3) \end{array} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = \frac{1}{-3}(5 + 4t) \\ x_3 = t \end{array}$$

- Řešením je tedy každá trojice $(1 - 2t, \frac{1}{-3}(5 + 4t), t)$ kde t je libovolné.
- To je totéž jako $(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2})$.

Příklad 3

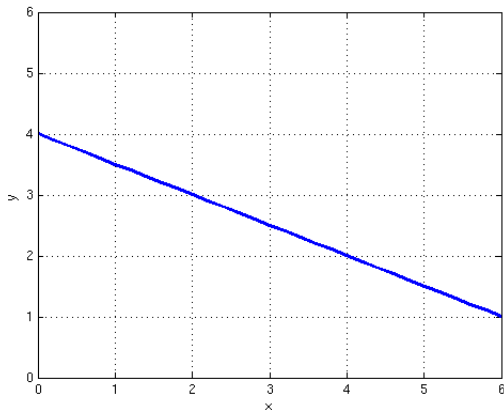
$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{array} \longrightarrow \dots$$

- Gaussova eliminační metoda je velmi efektivní při ručním řešení malých soustav rovnic i pro počítačové řešení větších soustav (stovky až tisíce rovnic).
- Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější algoritmy.

Geometrický význam lineárních rovnic

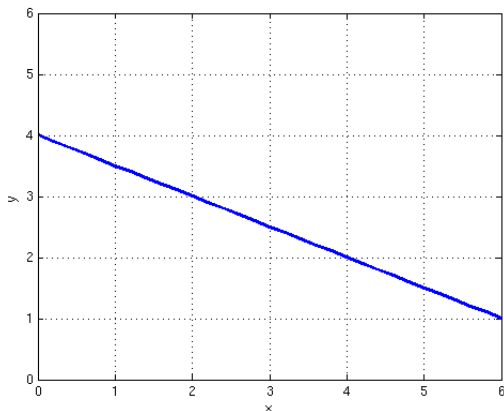
Lineární rovnice o dvou neznámých

- Lineární rovnice o dvou neznámých má nekonečně mnoho řešení, které tvoří *přímku* v dvojrozměrném prostoru.
- Řešením $x + 2y = 8$ je každá dvojice tvaru $(t, 4 - \frac{t}{2})$.



Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

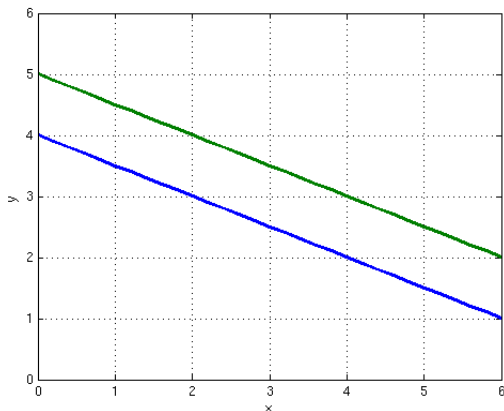
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■ $x + 2y = 8$

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

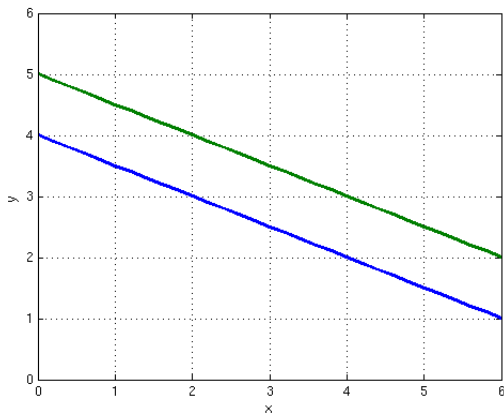
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■ $x + 2y = 8$
■ $x + 2y = 10$

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



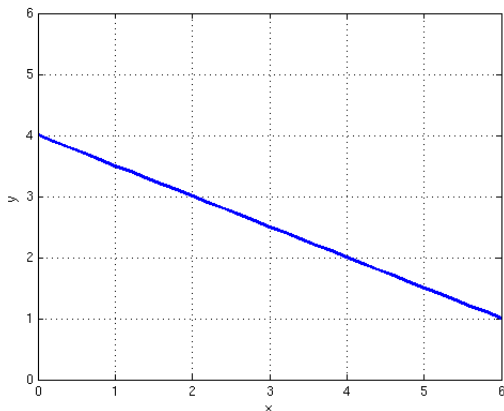
■ $x + 2y = 8$

■ $x + 2y = 10$

nemá řešení

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

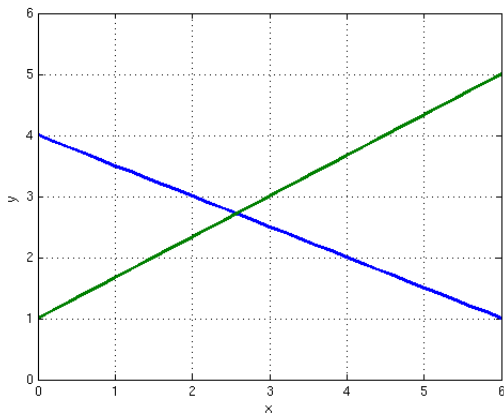
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■ $x + 2y = 8$

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

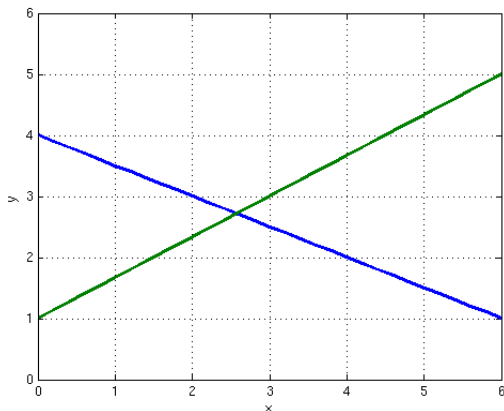
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■ $x + 2y = 8$
■ $2x - 3y = -3$

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



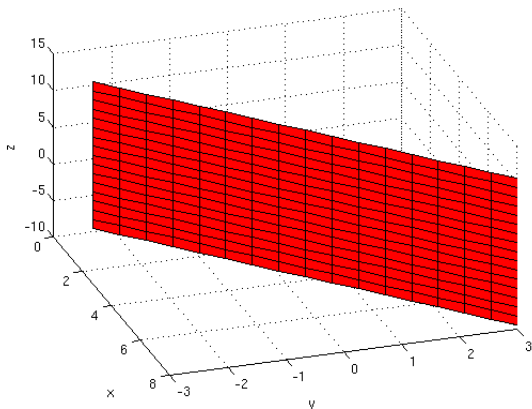
■ $x + 2y = 8$

■ $2x - 3y = -3$

má řešení $(\frac{18}{7}, \frac{19}{7})$

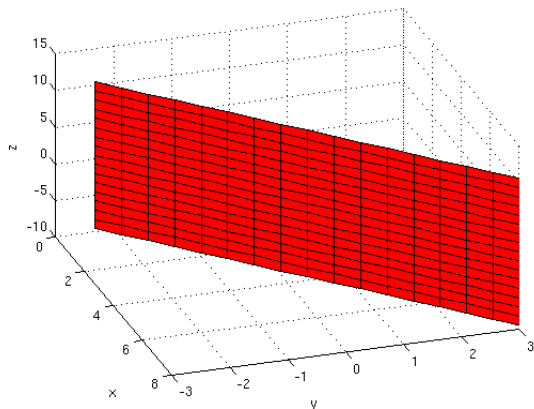
Lineární rovnice o třech neznámých

- Lineární rovnice o třech neznámých má nekonečně mnoho řešení, které tvoří *rovinu* v trojrozměrném prostoru.
- Řešením $2x - 3y + 0z = 7$ je každá trojice tvaru $(t, \frac{2t-7}{3}, r)$.



Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

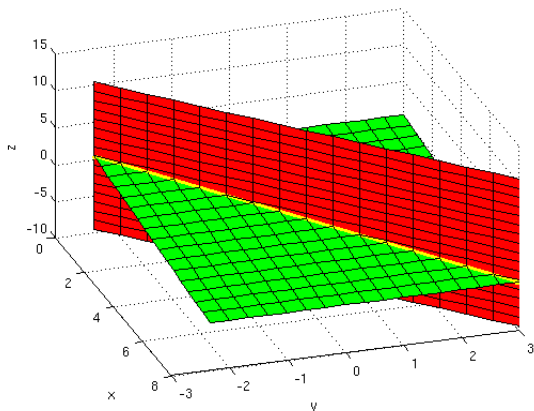
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



■ $2x - 3y = 7$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

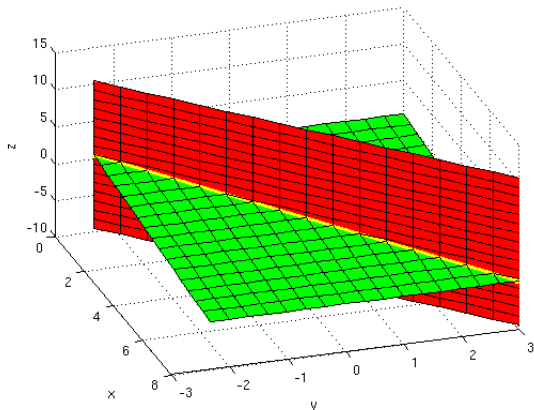
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



$$\begin{array}{l} \blacksquare 2x - 3y = 7 \\ \blacksquare x + 2z = 1 \end{array}$$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



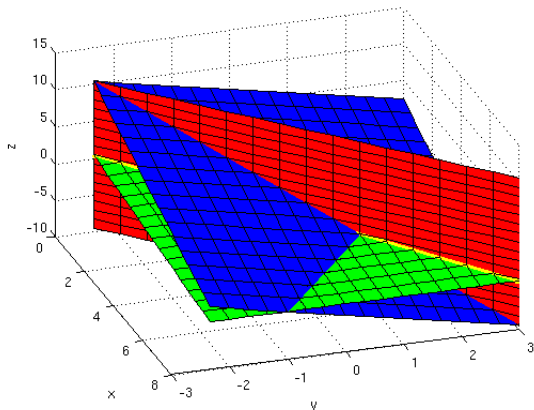
$$\begin{aligned} \blacksquare & 2x - 3y = 7 \\ \blacksquare & x + 2z = 1 \end{aligned}$$

řešení tvoří přímku

$$\blacksquare \left(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2} \right)$$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

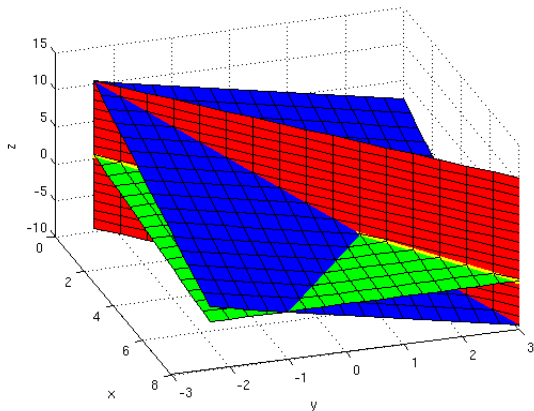
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



- $2x - 3y = 7$
- $x + 2z = 1$
- $3x + 3y + 2z = 14$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



- $2x - 3y = 7$
- $x + 2z = 1$
- $3x + 3y + 2z = 14$

jediné řešení je
 $(5, 1, -2)$

- Všechna řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých mohou tvořit:
 - rovinu (typicky pokud máme jednu rovnici)
 - přímku (typicky pokud máme dvě rovnice)
 - bod (typicky pokud máme tři rovnice)
- Soustava také nemusí mít žádné řešení (typicky pokud máme více jak tři rovnice nebo pokud nějaké dvě rovnice odpovídají rovnoběžným rovinám).