

Modelování komplexních sítí

Radek Pelánek

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Souvislosti

- další typ aplikace modelování a simulace
- nemodelujeme konkrétní systém, ale **obecný jev**, vlastnost společnou mnoha systémům (srovnej fyzikální zákony)
- ilustrace obecných principů komplexních systémů (např. mocninný zákon)

Komplexní síť

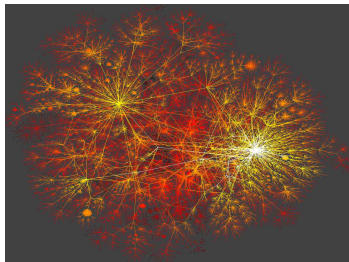
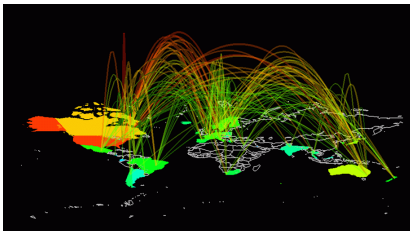
- **komplexní síť** (např. sociální sítě, regulační sítě exprese genů, Internet) = rozsáhlý graf
- **společné vlastnosti** – např. vzdálenosti, stupně vrcholů
- **abstraktní modely** (vesměs výpočetní), kombinace matematických důkazů a simulace

1

- do 90. let: modelem náhodné grafy
- druhá polovina 90. let: dostatek sítí v elektronické podobě, možnost jejich počítačové analýzy
- konec 90. let: první modely komplexních sítí
- knihy:
 - Linked (V pavučině sítí), A-L Barabási, 2002
 - Small Worlds, Six degrees, D Watts, 2003

Internet

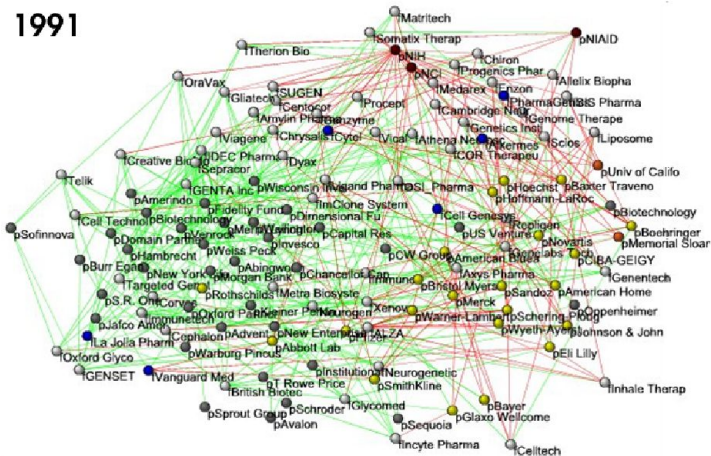
uzly: servery, hrany: dráty



Firmy

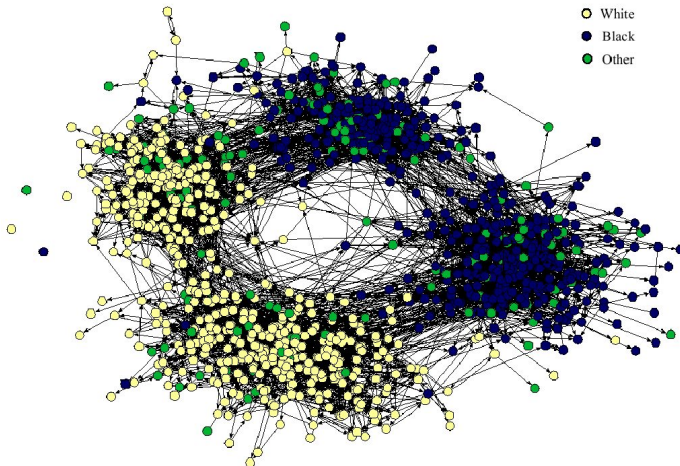
uzly: firmy, hrany: obchodují spolu, sdílejí šéfy, ...

1991



Sociální sítě

uzly: lidé, hrany: známost

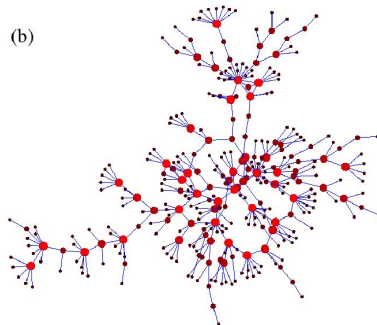




Sieť sexuálnych vzťahů

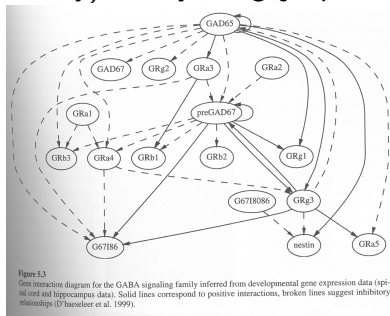
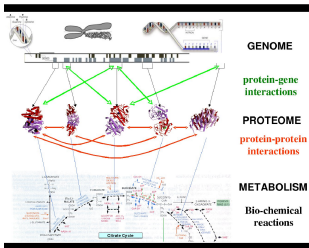
uzly: lidé, hrany: sexuální styk

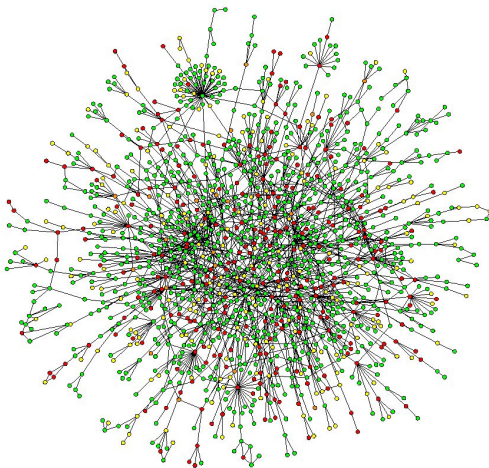
(b)



Buněčná biologie

uzly: proteiny, (příp. další látky), hrany: reagují spolu





Potravní řetězce

uzly: zvířata, hrany: pokud jedno žere druhé

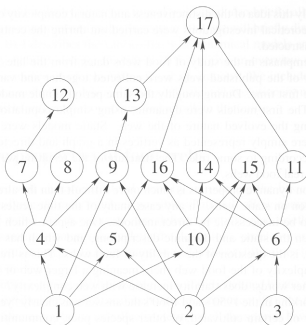
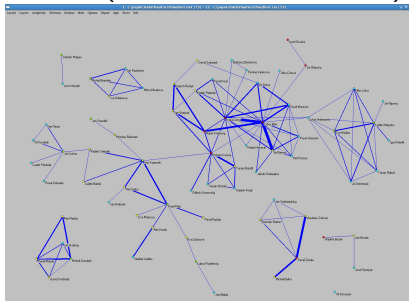
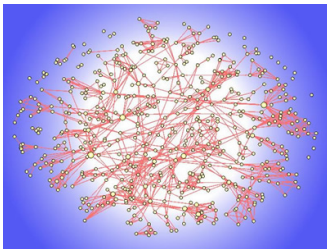


Figure 10.1: Narragansett Bay food web. 1=flagellates, diatoms; 2=particulate detritus; 3=macroalgae, eelgrass; 4=*Acartia*, other copepods; 5=sponges, clams; 6=benthic macrofauna; 7=ctenophores; 8=meroplankton, fish larvae; 9=pacific menhaden; 10=bivalves; 11=crabs, lobsters; 12=butterfish; 13=striped bass, bluefish, mackerel; 14=demersal species; 15=starfish; 16=floUNDER; 17=man. (After Yodanis 1989. *Introduction to theoretical ecology*. Harper and Row. New York.)



Vědecká spolupráce

uzly: vědci, hrany: spoluautorství (viz též Erdős number)



1 2 3 4

oblast	uzly	hrany
Web	stránky	odkazy
internet	servery	dráty
vědecká spolupráce	vědci	spoluautorství
síť herců	herci	hráli v jednom filmu
citační síť	vědecké články	citace
potravní řetězce	druhy zvířat	vztah lovec-kořist
síť sexuálních kontaktů	lidé	sex
metabolismus	chemické látky	reakce
lingvistika	slova	konotace, synonyma
telefonní hovory	telefony	volání
elektrické síť	transformátory	dráty
neuronové síť	neurony	synaptické spojení

Grafy

- graf $G = (V, E)$
- V je množina uzlů (vrcholů)
- E je množina hran
 - orientované hrany: $E \subseteq V \times V$
 - neorientované hrany: $E \subseteq \binom{V}{2}$

Grafy: základní pojmy

- cesty, **vzdálenosti**
- **stupeň** vrcholu d_v = počet hran z vrcholu v vycházejících (u orientovaných grafů rozlišujeme výstupní stupeň a vstupní stupeň)
- **distribuce stupňů** $P(k)$ – pravděpodobnost, že náhodně vybraný uzel má stupeň k

Typické vlastnosti komplexních sítí

- **malé vzdálenosti** (vlastnost malého světa, small world phenomenon)
- **shlukování** (clustering)
- **bezškálovitost** (scale-free)
- „motivy“

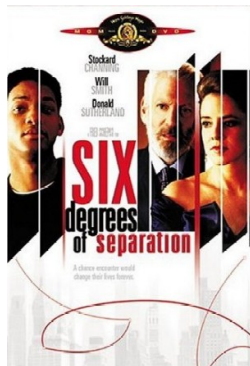
- průměrné **nejkratší vzdálenosti** mezi uzly v komplexních sítích jsou malé
- „malý svět“ – potkáte cizího člověka a po chvíli zjistíte, že máte společné známé

Milgramův experiment

- Stanley Milgram, 1967
- 60 balíčků, z Kansasu do Massachusetts
- balíčky povoleno posílat jen známým osobám (známost na úrovni křestního jména \sim tykání)
- identifikace adresáta: jméno, zaměstnání, přibližné místo bydliště
- cíl: co nejrychleji k adresátovi

Šest stupňů odloučení

- balíčky, které došly, přišly průměrně na **šest** kroků
- experiment měl poměrně dost vad, ale i tak se výsledek zprofanoval (a teprve později potvrdil)
- „šest stupňů odloučení“
- pozn. též divadelní hra, film
- viz též Erdős number, Bacon number



Shlukování

- lidé mají tendenci tvořit shluky
- znám Pepu a Frantu \Rightarrow je pravděpodobné, že Pepa zná Frantu
- nejen sociální sítě

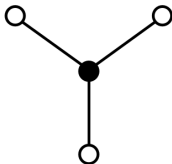
Shlukování formálněji

- uzel v má k_v sousedů
- e_v = počet vzájemně propojených sousedů
- **koeficient shlukování:**

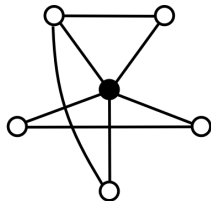
$$C_v = \frac{e_v}{\binom{k_v}{2}} = \frac{2e_v}{k_v(k_v - 1)}$$

Koeficient shlukování: příklad

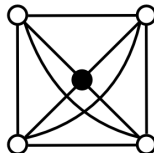
koeficient
shlukování
uzlu ●



$$0/3 = 0$$



$$3/10 = 0,3$$



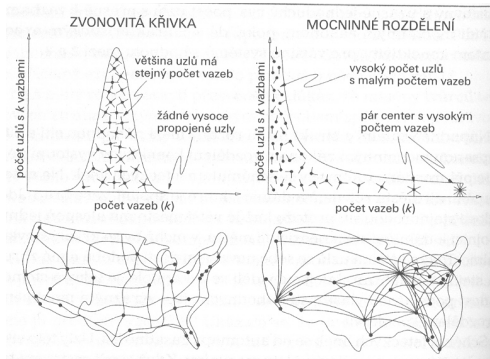
$$6/6 = 1$$

Distribuce stupňů

existuje typická hodnota, kolem které se stupeň uzlů pohybuje („škála grafu“)?

- náhodné grafy \Rightarrow ano
- komplexní sítě \Rightarrow ne

Poisson a Mocninný zákon: příklad



A.-L. Barabási: V pavučině sítí

Distribuce stupňů formálněji

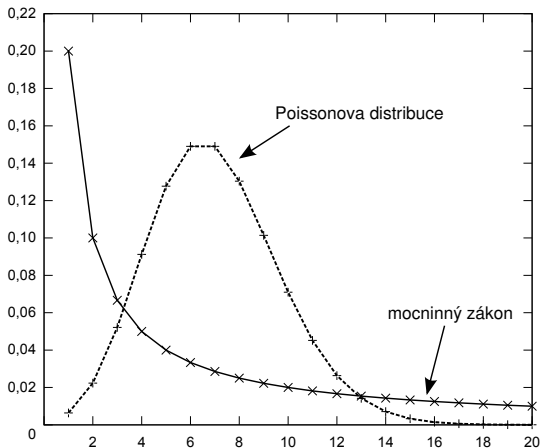
- Poissonova distribuce (pro velké $\lambda \sim$ normální distribuce)

$$P(n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$$

- Mocninný zákon

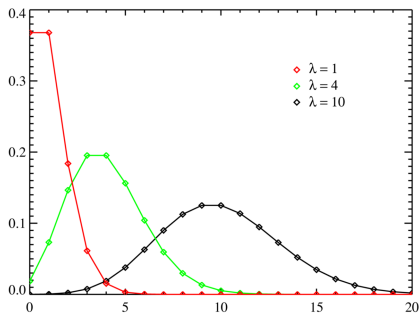
$$P(n) \sim n^{-\gamma}$$

Poissonova distribuce, mocninný zákon

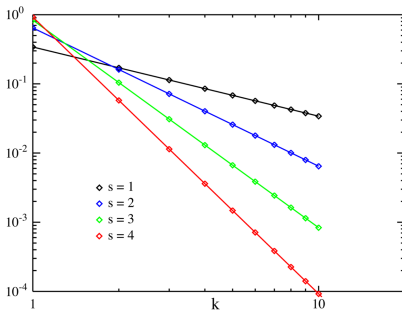


Poissonova distribuce, mocninný zákon

Poissonova distribuce



mocninný zákon



Příklady mocninného zákona

- rozdělení bohatství
- velikost meteoritů, záplav, požárů, zemětřesení, ...
- frekvence použití písmen, slov v jazyce; noty v hudebních skladbách
- jména v populaci
- velikost měst
- management: zákon 80-20 (produkce – zaměstnanci, rozhodnutí – čas porady)

to zavání přítomností pozitivních zpětných vazeb ... dokážete je pojmenovat?

Příklad: Hamlet

The, 1101; And, 898; To, 726; Of, 657; I, 561; You, 544; My, 508; A, 498; In, 414; It, 414; That, 389; Is, 334; Not, 315; This, 296; His, 292; But, 265; With, 257; For, 247; Your, 242; Me, 235; As, 228; Be, 226; Lord, 218; He, 216; What, 203; So, 197; Him, 189; Have, 179; Will, 169; Do, 150; No, 143; We, 140; Are, 131; On, 125; O, 121; Our, 119; By, 116; Shall, 114; If, 113; Or, 112; All, 110; Good, 109; Come, 104; Thou, 103; Now, 97; From, 95; More, 95; They, 95; Let, 94; How, 88; Thy, 87; Her, 86; At, 84; Was, 83; Most, 82; Like, 80; Would, 80; Hamlet, 78; Well, 78; There, 76; Know, 74; Sir, 74; Them, 74; May, 71; Tis, 71; Go, 70; Us, 69; King, 67; Love, 66; Did, 65; Very, 64; Speak, 63; Which, 63; Hath, 62; Then, 62; Why, 62; Must, 61; Thee, 59; Give, 58; Should, 58; An, 57;

Mocninný zákon v komplexních sítích

komplexní síť: pár hodně propojených uzlů, většina uzlů má malé propojení

- webové stránky
- citační síť
- sociální síť

bezškálovitost (scale-free) – neexistuje typická hodnota (škála)

Motivy

- podgrafy vyskytující se daleko častěji než v náhodném grafu
- různé motivy pro různé typy sítí
- většina komplexních sítí má nějaké motivy
- další specifikum: korelace mezi stupni sousedních vrcholů

Network	Nodes	Edges	N_{real}	$N_{rand} \pm SD$	Z score	N_{real}	$N_{rand} \pm SD$	Z score	N_{real}	$N_{rand} \pm SD$	Z score
Gene regulation (transcription)											
					Feed-forward loop			Bi-fan			
<i>E. coli</i>	424	519	40	7 ± 3	10	203	47 ± 12	13			
<i>S. cerevisiae</i> ⁹	685	1,052	70	11 ± 4	14	1812	300 ± 40	41			
Neurons											
					Feed-forward loop			Bi-fan			Bi-parallel
<i>C. elegans</i> [†]	252	509	125	90 ± 10	3.7	127	55 ± 13	5.3	227	35 ± 10	20
Food webs											
					Three chain			Bi-parallel			
Little Rock	92	984	3219	3120 ± 50	2.1	7295	2220 ± 210	25			
Ythan	83	391	1182	1020 ± 20	7.2	1357	230 ± 50	23			
St. Martin	42	205	469	450 ± 10	NS	382	130 ± 20	12			
Chesapeake	31	67	80	82 ± 4	NS	26	5 ± 2	8			
Couchella	29	243	279	235 ± 12	3.6	181	80 ± 20	5			
Skipwith	25	189	184	150 ± 7	5.5	397	80 ± 25	13			
B. Brook	25	104	181	130 ± 7	7.4	267	30 ± 7	32			
Electronic circuits (forward logic chips)											
					Feed-forward loop			Bi-fan			Bi-parallel
s15850	10,383	14,240	424	2 ± 2	285	1040	1 ± 1	1200	480	2 ± 1	335
s38584	20,717	34,204	413	10 ± 3	120	1739	6 ± 2	800	711	9 ± 2	320
s38417	23,843	33,661	612	3 ± 2	400	2404	1 ± 1	2550	531	2 ± 2	340
s9234	5,844	8,197	211	2 ± 1	140	754	1 ± 1	1050	209	1 ± 1	200
s13207	8,651	11,831	403	2 ± 1	225	4445	1 ± 1	4950	264	2 ± 1	200
Electronic circuits (digital fractional multipliers)											
					Three-node feedback loop			Bi-fan			Four-node feedback loop
s208	122	189	10	1 ± 1	9	4	1 ± 1	3.8	5	1 ± 1	5
s420	252	399	20	1 ± 1	18	10	1 ± 1	10	11	1 ± 1	11
s838 [‡]	512	819	40	1 ± 1	38	22	1 ± 1	20	23	1 ± 1	25
World Wide Web											
					Feedback with two mutual dyads			Fully connected triad			Uplinked mutual dyad
nd.edu [§]	325,729	1.46e6	1.1e5	2e3 ± 1e2	800	6.8e6	5e4 ± 4e2	15,000	1.2e6	1e4 ± 2e2	5000

Váhy hran

hrany různě důležité

váhy hran:

- internet: množství přenesených dat mezi počítači
- sociální sítě: četnost sociálních kontaktů
- proteiny: frekvence reakcí

váhy hran mají také distribuci podle mocninného zákona

Význam slabých hran

- silné hrany tvoří shluky
- slabé hrany propojují tyto shluky
- význam např. při shánění práce

Vlastnosti sítí – výzkum

	network	type	n	m	z	ℓ	α	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$	r	Ref(s).
social	film actors	undirected	449 913	25 516 482	113.43	3.48	2.3	0.20	0.78	0.208	20, 416
	company directors	undirected	7 673	55 392	14.44	4.60	–	0.59	0.88	0.276	105, 323
	math coauthorship	undirected	253 339	496 489	3.92	7.57	–	0.15	0.34	0.120	107, 182
	physics coauthorship	undirected	52 909	245 300	9.27	6.19	–	0.45	0.56	0.363	311, 313
	biology coauthorship	undirected	1 520 251	11 803 064	15.53	4.92	–	0.088	0.60	0.127	311, 313
	telephone call graph	undirected	47 000 000	80 000 000	3.16		2.1				8, 9
	email messages	directed	59 912	86 300	1.44	4.95	1.5/2.0		0.16		136
	email address books	directed	16 881	57 029	3.38	5.22	–	0.17	0.13	0.092	321
	student relationships	undirected	573	477	1.66	16.01	–	0.005	0.001	–0.029	45
	sexual contacts	undirected	2 810				3.2				265, 266
information	WWW nd.edu	directed	269 504	1 497 135	5.55	11.27	2.1/2.4	0.11	0.29	–0.067	14, 34
	WWW Altavista	directed	203 549 046	2 130 000 000	10.46	16.18	2.1/2.7				74
	citation network	directed	783 339	6 716 198	8.57		3.0/–				351
	Roget's Thesaurus	directed	1 022	5 103	4.99	4.87	–	0.13	0.15	0.157	244
	word co-occurrence	undirected	460 902	17 000 000	70.13		2.7		0.44		119, 157
technological	Internet	undirected	10 697	31 992	5.98	3.31	2.5	0.035	0.39	–0.189	86, 148
	power grid	undirected	4 941	6 594	2.67	18.99	–	0.10	0.080	–0.003	416
	train routes	undirected	587	19 603	66.79	2.16	–		0.69	–0.033	366
	software packages	directed	1 439	1 723	1.20	2.42	1.6/1.4	0.070	0.082	–0.016	318
	software classes	directed	1 377	2 213	1.61	1.51	–	0.033	0.012	–0.119	395
	electronic circuits	undirected	24 097	53 248	4.34	11.05	3.0	0.010	0.030	–0.154	155
	peer-to-peer network	undirected	880	1 296	1.47	4.28	2.1	0.012	0.011	–0.366	6, 354
biological	metabolic network	undirected	765	3 686	9.64	2.56	2.2	0.090	0.67	–0.240	214
	protein interactions	undirected	2 115	2 240	2.12	6.80	2.4	0.072	0.071	–0.156	212
	marine food web	directed	135	598	4.43	2.05	–	0.16	0.23	–0.263	204
	freshwater food web	directed	92	997	10.84	1.90	–	0.20	0.087	–0.326	272
	neural network	directed	307	2 359	7.68	3.97	–	0.18	0.28	–0.226	416, 421

Modely komplexních sítí

- komplexní sítě mají **typické vlastnosti**
- dokážeme tyto vlastnosti **modelovat** na abstraktní úrovni?

Modely komplexních sítí

- náhodné grafy (Erdős-Renyi model)
- grafy malého světa (small-world graphs, Watts-Strogatz model)
- bezškálovité sítě (scale-free networks, Barabási-Albert model)

modely jednoduché, umožňují simulaci i částečné analytické řešení

Náhodné grafy

Erdős-Renyi model:

- množina vrcholů V , počet hran m
- z množiny potenciálních hran $\binom{V}{2}$ vybereme náhodně m hran

Alternativní definice (zhruba ekvivalentní):

- množina vrcholů V , pravděpodobnost p
- pro každou dvojici vrcholů vložíme hranu s pravděpodobností p

Zajímavé výsledky

- „téměř všechny grafy mají vlastnost Q “ =
pravděpodobnost se blíží k 1 (v limitě pro $n \rightarrow \infty$)
- pro hodně vlastností **fázový přechod**:
 - grafy s pravděpodobností hran $p \Rightarrow$ téměř všechny mají danou vlastnost nebo ji nemají (např. souvislost)
 - skokový přechod
- Demo NetLogo – velikost největší komponenty

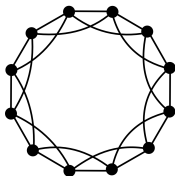
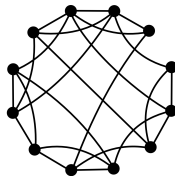
Vlastnosti

- průměrná délka cesty: $\sim \log n$ (tj. splňují požadavek malého světa)
- distribuce stupňů: **Poissonova distribuce**
- shlukování: průměrný shlukovací koeficient $C \sim p \sim \frac{m}{n}$, výrazně **méně** než u reálných komplexních sítí

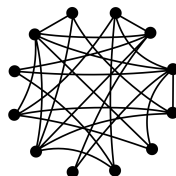
Grafy malého světa

(Small-world graphs, Watts-Strogatz model)

- 1 **Pravidelná inicializace:** vezmeme N vrcholů, uspořádáme je do kruhu a každý spojíme s K sousedy ($K/2$ na každé straně).
- 2 **Náhodné předrátování:** s pravděpodobností p každou hranu nahradíme jinou, náhodnou hranou.

 $p = 0$ 

rostoucí míra náhody

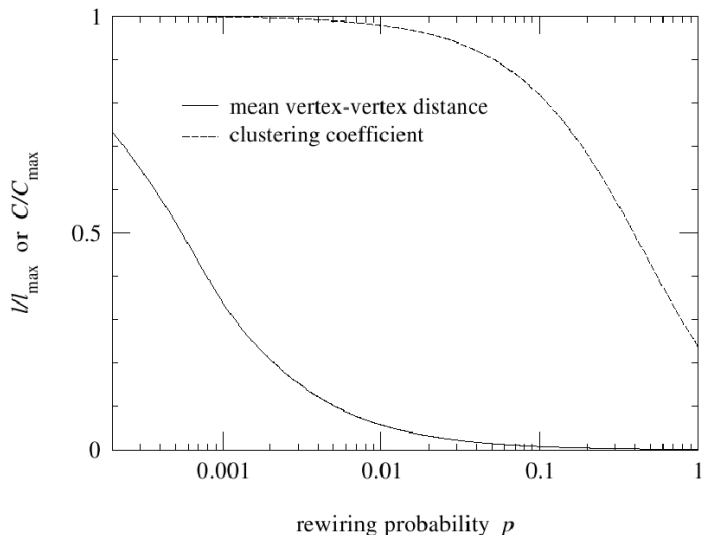
 $p = 1$

Demo NetLogo

Vlastnosti

- průměrná délka cesty $\sim \log N$ (pro vhodné p , přesná charakteristika složitá)
- shlukování: pro $p = 0$ máme $C = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}$, pro větší p trochu menší, ale stále **dosti velké** (reálné)
- distribuce stupňů \sim Poissonova distribuce (přesná charakterizace složitá), **jiná** než u reálných komplexních sítí

Mezi řádem a náhodou



Bezškálovité sítě

(scale-free networks, Barabási-Albert model)

- 1 začít s malým množstvím vrcholů a hran
- 2 postupně přidávat vrcholy, nově přidaný vrchol je spojen k hranami
- 3 **upřednostněné připojení** (preferential attachment):
pravděpodobnost, že bude vrchol vybrán je úměrná jeho aktuálnímu stupni

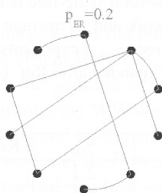
$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum k_j}$$

Demo NetLogo

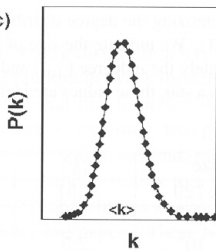
Vlastnosti

- průměrná délka cesty: $\sim \log N$
- distribuce stupňů: **mocninný zákon** (pro základní model s fixním $\gamma = 3$)
- shlukování: větší než u náhodných grafů, ale klesá s velikostí grafu (na rozdíl od Watts-Strogatz modelu), je **menší** než pro reálné sítě

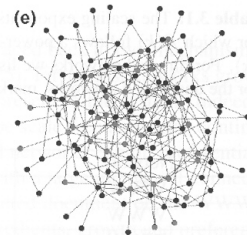
(a)



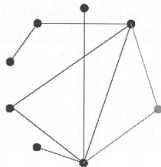
(c)



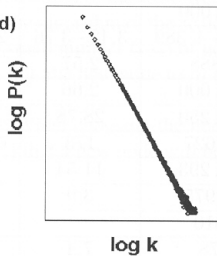
(e)



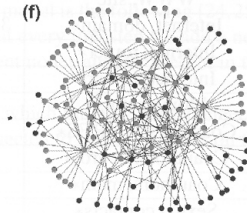
(b)



(d)



(f)



Poznámky

- proti předchozím dvěma modelům je zde důraz na **vznik** (růst) sítí – žádaná struktura vzniká jako vedlejší produkt
- upřednostněné připojení = **pozitivní zpětná vazba**
- důležitý postupný růst i upřednostněné připojení

Další modely rostoucích sítí

- nelineární $\Pi(k)$ (upřednostněné připojení)
- počáteční atraktivnost
- urychlený růst
- stárnutí, způsobilost (fitness)
- rušení, přesměrování hran

Deterministický model bezškálovité sítě I

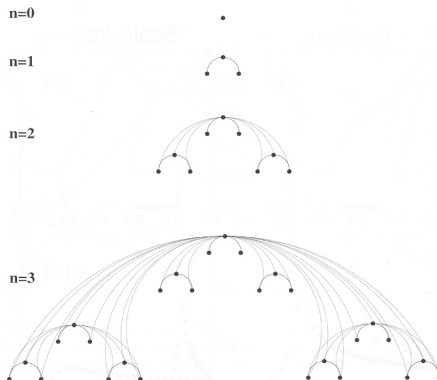
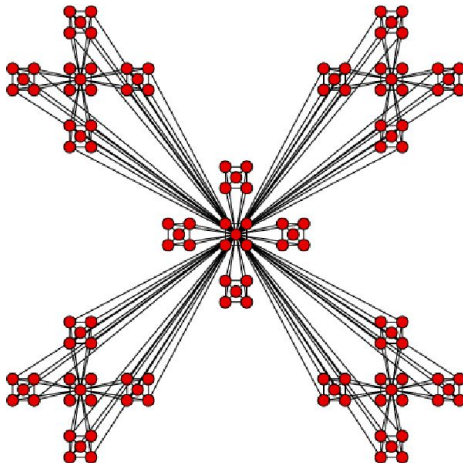


Figure 3.6: Construction of the deterministic scale-free network, showing the first four steps of the iterative process. After [42].

Deterministický model bezškálovité sítě II



K čemu to je?

- komplexní sítě mají zajímavé vlastnosti
- máme modely, které tyto vlastnosti (do určité míry) reprodukuje
- no a co?
- můžeme to nějak využít?

Procesy na sítích

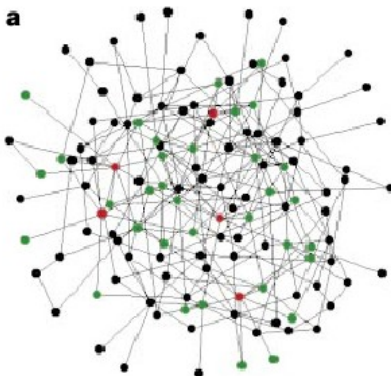
- chyby, útoky, stabilita
- šíření epidemií
- hledání v sítích
- spolupráce
- identifikace klíčových osob

analýzu procesů provádíme zejména pomocí **simulace**

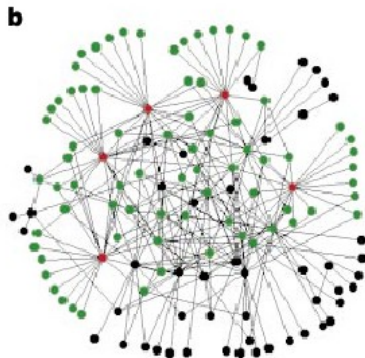
Chyby, útoky, robustnost sítí

- **robustnost sítě**: jak se změní vlastnosti sítě (souvislost, průměrná vzdálenost) při odstranění určitých uzlů
- **chyby** = náhodně odstraněné uzly
- **útoky** = cíleně odstraněné uzly, většinou ty s největším stupněm
- Jaký vliv na robustnost má topologie sítě?

Role klíčových uzlů

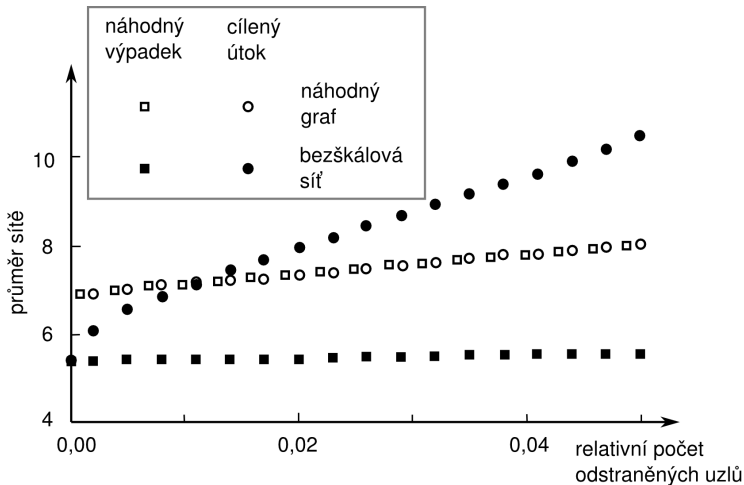


Exponential



Scale-free

Odolnost proti chybám a útokům



Robustnost a topologie

Bezškálovité sítě (oproti náhodným):

- vyšší odolnost proti chybám
- náchylnější proti útokům – „Achilova pata komplexních sítí“

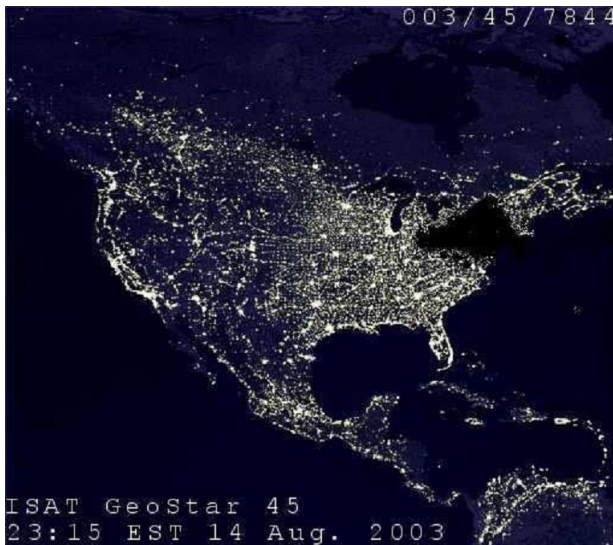
Příklady

Bezškálovité sítě s uvedenými vlastnostmi (odolnost proti chybám, náchylnost k útokům):

- komunikační sítě (Internet, www)
- ekonomické sítě (a např. teroristický útok na NY)
- proteiny – funkčnost vysoce propojených proteinů je životně důležitá

Dynamické efekty

- změna v síti může vyvolávat další změny
- např. elektrická energie v elektrické síti, energie v potravních řetězcích
- tok ovlivňuje funkčnost sítě
- jaká je robustnost sítě?
- jak souvisí s topologií sítě?



Dynamické efekty

- narušení sítě může vést k neočekávaným důsledkům (vlivem zpětných vazeb)
- elektřina: výpadek celé sítě vlivem kumulace zátěže
- potravní řetězce: vyhubení predátora vedoucí k poklesu kořisti

Robustnost: příklady studovaných otázek

- Jaký je vliv stability/robustnosti a složitosti sítě?
- Jaký vliv na stabilitu ekosystému má složitost potravního řetězce (a potažmo biodiverzita)?
- Proč jsou potravní řetězce krátké?
- různé výsledky pro sítě modelované náhodně a sítě modelované realističtěji

Šíření epidemií

- šíření počítačových virů po Internetu
- HIV po sexuální síti
- šíření náboženství, informací v sociální síti
- šíření nových technologií (na základě sociální sítě)

(již jsme viděli: přednáška systémové modelování, cvičení, SIR, SIS, SIRS)

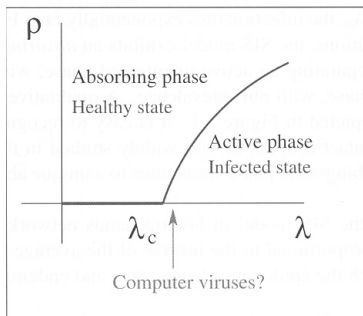
Imunizace

- léky
- antiviry
- cenzura, inkvizice
- reklama

Epidemie v homogenním prostředí

V „homogenním“ prostředí (de facto náhodný graf):

- **kritická hranice**
 - infekčnost menší \Rightarrow epidemie se nešíří
 - infekčnost větší \Rightarrow epidemie se výrazně šíří
- **uniformní imunizace**

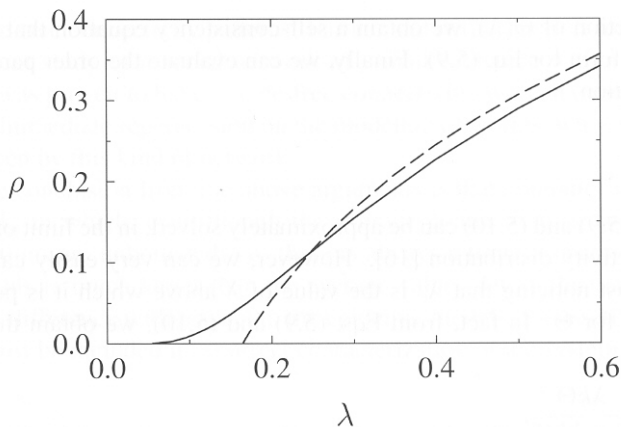


Epidemie v bezškálovitých sítích

- **neexistuje kritická hranice**
- nemoc s velmi malou infekčností se může rozšířit – díky uzlům s vysokým stupněm
- uniformní imunizace je poměrně neúčinná
- **cílená imunizace** zasahující hlavně uzly s vysokým stupněm však může být velmi účinná

Praktické poučení: např. pro boj s AIDS

Epidemie v bezškálovitých sítích



Hledání v grafu

- vlastnost „malého světa“ – mezi většinou uzlů **existují** krátké cesty
- Jak tyto cesty najít?
- Milnerův experiment:
 - nejen, že existuje krátký řetězec známostí
 - účastníci experimentu jej byli schopni najít **bez znalosti celého grafu**, tj. jen za použití **lokálních informací** (srovnej ABM)

Kleinbergův model

- graf je založen na dvourozměrné mřížce, uzly spojeny se sousedy
- náhodně přidány dlouhé vazby
- informace o poloze v této mřížce je využívána pro navigaci směrem k cíli

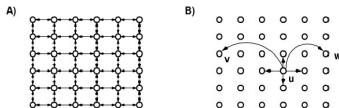
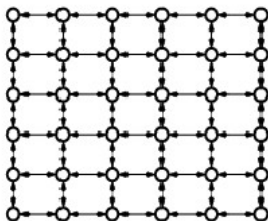


Figure 1: (A) A two-dimensional grid network with $n = 6$, $p = 1$, and $q = 0$. (B) The contacts of a node u with $p = 1$ and $q = 2$. v and w are the two long-range contacts.

A)



B)

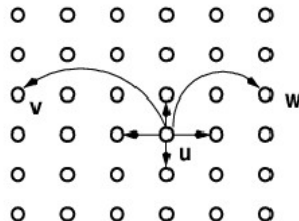
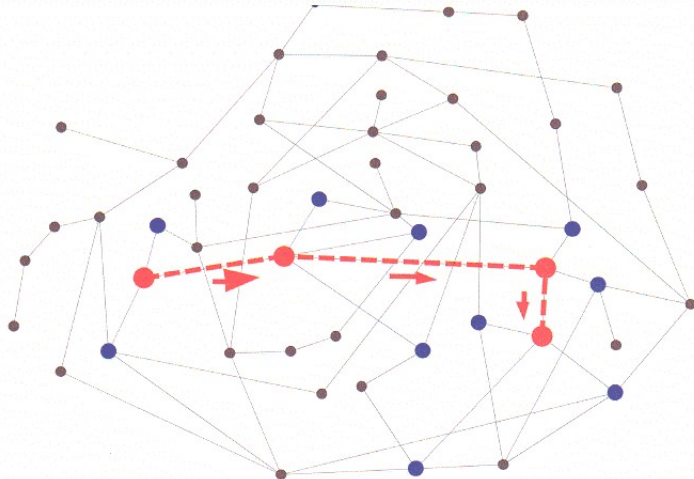
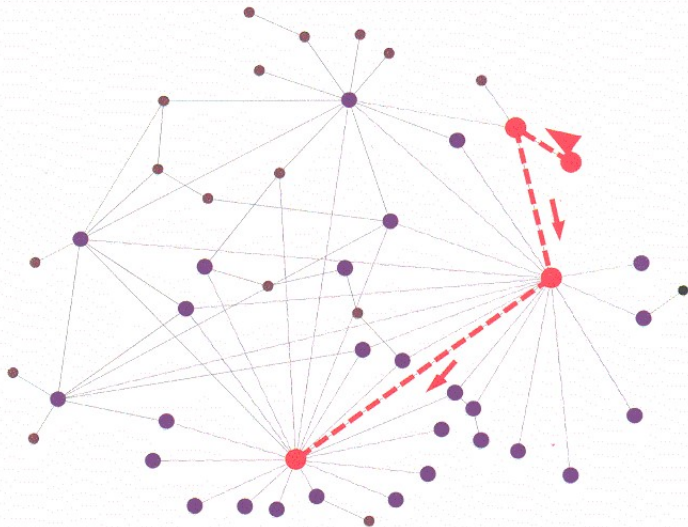


Figure 1: (A) A two-dimensional grid network with $n = 6$, $p = 1$, and $q = 0$. (B) The contacts of a node u with $p = 1$ and $q = 2$. v and w are the two long-range contacts.

Hledání s využitím náhodné procházky

- velký a neznámý graf \Rightarrow náhodná procházka
- **náhodná procházka** (random walk) = vždy vybírá další uzel pro navštívení čistě náhodně
- bezškálovité grafy: cíleně preferujeme uzly s vyšším stupněm
- výsledky simulace: lepší pokrytí než čistá náhodná procházka
- aplikace: Gnutella (peer-to-peer filesharing system)





Dynamika spolupráce v síti

- **dilema vězně** - dříve studováno v homogenním prostředí (každý s každým nebo pravidelná mřížka)
- jaký je **vliv topologie** sítě na vývoj spolupráce?
- pozorování:
 - **shlukování podporuje rozvoj spolupráce**
 - na grafech malého světa se spolupráci daří lépe než na náhodných grafech

Další procesy na sítích

- buněčné automaty na sítích
- synchronizace
- formování názorů
- iterované hry

Analýza sociálních sítí

social network analysis

- studováno dlouho – donedávna však data pouze v malém (dotazníky)
- nyní data ve velkém (mobily, e-maily, Facebook, ...)
- analýzy: metriky centrality, detekce shluků
- komerční využití:
 - mobilní operátoři a nabídky zákazníkům
 - doporučující algoritmy

Shrnutí

- **příklady** komplexních sítí
- **společné vlastnosti**: krátké cesty, shlukování, bezškálovitost
- **abstraktní modely**: náhodné grafy, malý svět, bezškálovité sítě
- **procesy na sítích**: útoky, výpadky, epidemie, šíření informací, spolupráce, hledání
- chování modelů studováno pomocí simulace