

Systemové modelování

Radek Pelánek

Obsah I

- 1 **Základy**
 - Základní prvky modelu
 - Příklad
- 2 **Diferenciální rovnice**
 - Vyjádření pomocí rovnic
 - Numerické řešení rovnic
 - Vztahy
- 3 **Příklady**
 - Lovec-kořist
 - Epidemie
 - Daisy world
 - Polya process

Obsah II

- 4 Modelovací typy
 - Vzory
 - Další prvky

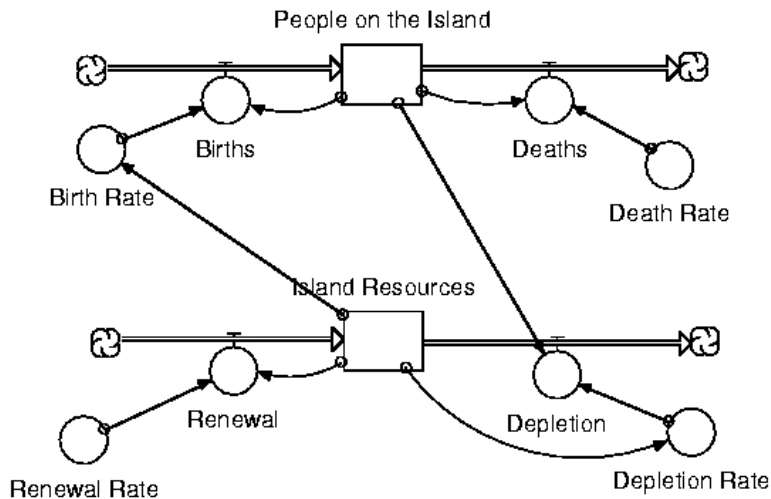
- 5 Simulace, analýza
 - Cíle
 - Analýza citlivosti
 - Zkoumání vlivu parametrů

- 6 Závěr

Základní přístup

- pohled na systém **shora**
- použití **souhrnných proměnných**, abstrahování od jednotlivců, lokálních vztahů
- systém vyjádřen jako **systém rovnic**, simulace spočívá v numerickém řešení těchto rovnic

Příklad



Systémový model: základní prvky

- ① zásobárny
- ② toky
- ③ parametry
- ④ vztahy

Základní prvky: příklady

zásobárna

populace

peníze na účtu

teplota

podíl na trhu

tok

narození, úmrtí, emigrace

úroky

ohřívání

noví zákazníci

parametr

porodnost, úmrtnost, m

úroková míra

tepelná kapacita

náklady na reklamu, u

Zásobárny

= *systemové proměnné, reservoirs, stocks*

= **podstatná jména** v modelu

- komponenty systému, kde se něco akumuluje
- lze číselně vyjádřit, v čase stoupá a klesá
- **nereprezentuje** (většinou) geografickou lokalitu
- systém **zmražený** v určitém okamžiku — zásobárna má **nenulovou** hodnotu.
- velikost populace
- peníze na účtu
- teplota
- podíl na trhu

Toky

= *processes, flows*

= **slovesa** v modelu

- aktivity, které určují hodnotu zásobáren v čase
- určují zda obsah zásobárny narůstá/klesá
- jednosměrné i obousměrné
- systém **zmražený** v určitém okamžiku — toky mají **nulovou** hodnotu.
- narození, umrtí, emigrace
- úroky
- ohřívání, ochlazení
- noví zákazníci

Parametry

= *convertors, auxiliaries, system constants*

- tempo s jakým dochází ke změně obsahu zásobárny vlivem toků
- často *vnější* (exogenous) proměnné systému — chování nemodelujeme
- hodnoty — pozorování, úvaha, odhad
- porodnost, úmrtnost
- úroková míra
- tepelná kapacita
- náklady na reklamu, účinnost reklamy

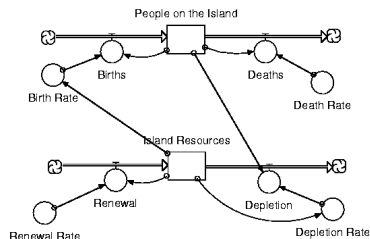
Vztahy

= *interrelationships*

- závislosti mezi jednotlivými částmi systému
- co s čím souvisí, co na čem závisí, atd.

Život na ostrově

- zásobárny: people on the island (P), island resources (I)
- toky: births (B), death (D), renewal (R), depletion (D)
- parametry: birth rate (BR), death rate (DR), renewal rate (RR), depletion rate (DR)
- vztahy: zbývající jednoduché šipečky



Ostrov: rovnice

```

Island_Resources(t) = Island_Resources(t - dt) + (Renewal - Depletion) * dt
INIT Island_Resources = 4000
Renewal = Island_Resources*Renewal_Rate
Depletion = People_on_the_Island*Depletion_Rate
People_on_the_Island(t) = People_on_the_Island(t - dt) + (Births - Deaths) * dt
INIT People_on_the_Island = 50
Births = People_on_the_Island*Birth_Rate
Deaths = People_on_the_Island*Death_Rate
Death_Rate = 0.05
Renewal_Rate = 0.05
Birth_Rate = GRAPH(Island_Resources/INIT(Island_Resources))
(0.00, 0.011), (0.2, 0.011), (0.4, 0.0145), (0.6, 0.025), (0.8, 0.0475),
(1.00, 0.0555), (1.20, 0.0645), (1.40, 0.0715), (1.60, 0.077),
(1.80, 0.0795), (2.00, 0.0825)
Depletion_Rate = GRAPH(Island_Resources/INIT(Island_Resources))
(0.00, 9.65), (0.2, 8.85), (0.4, 6.60), (0.6, 4.95), (0.8, 4.25),
(1.00, 3.75), (1.20, 3.05), (1.40, 2.95), (1.60, 2.75), (1.80, 2.55),
(2.00, 2.55)

```

Systémové modely = soustavy rovnic

- systémový model = **systém (diferenciálních) rovnic**
- rozdělení do různých stavebních prvků slouží „pouze“ k lepšímu modelování a ke grafickému znázornění modelů
- rovnice se dají **generovat automaticky**

Jak dostaneme rovnice?

Zásobárny

Uvažme předchozí příklad. Pro velikost populace platí:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + B(t) \cdot \Delta t - D(t) \cdot \Delta t$$

Což můžeme zapsat jako diferenční rovnici:

$$(P(t + \Delta t) - P(t))/\Delta t = B(t) - D(t)$$

Respektive jako diferenciální rovnici:

$$dP/dt = B(t) - D(t)$$

Podobně pro všechny zásobárny.

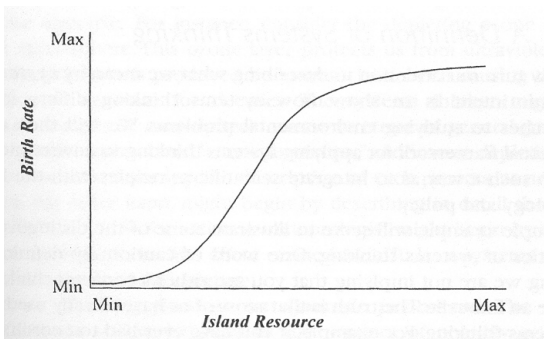
Toky, parametry

- rovnice pro velikost toků (příp. hodnoty parametrů) — musí dodat uživatel
- konvence: daný prvek (tok, parametr) závisí **právě** na těch prvcích, ze kterých do něj vede šipka
- snažíme se vyjádřit vztah co **nejjednoduším** matematickým vzorcem, např.:

$$B(t) = BR(t) \cdot P(t)$$

Grafické vyjádření závislostí

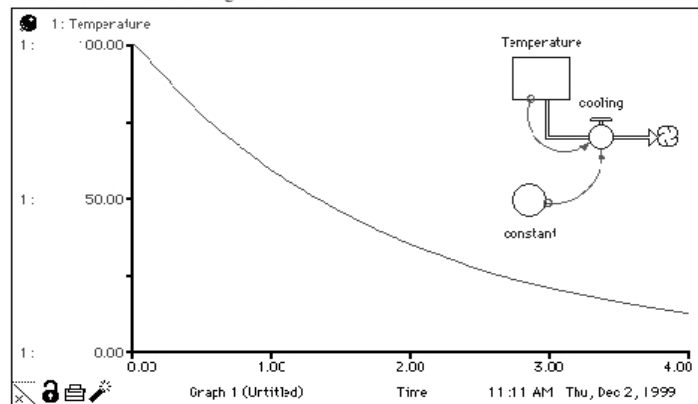
Pokud neumíme vyjádřit závislost pomocí jednoduchého matematického vztahu, lze použít též závislost vyjádřenou grafem (zadáme několik hodnot, zbytek se interpoluje).
Příklad: závislost porodnosti na dostupných zdrojích ostrova



Řešení diferenciálních rovnic

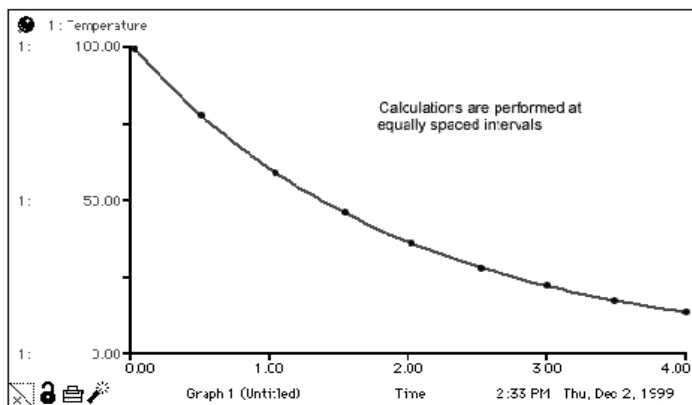
- výše uvedeným postupem se model převede na systém diferenciálních rovnic (s počáteční podmínkou)
- ve většině případů **nelze** tyto systémy řešit **analyticky** (přesně)
- používají se **numerické metody** pro aproximaci řešení

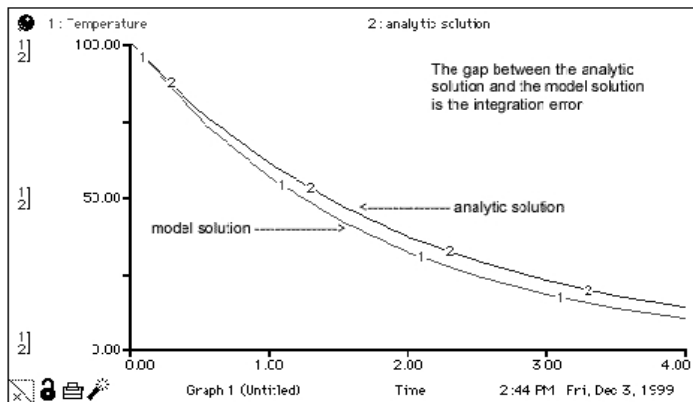
Idealized Behavior of Cooling Model



Základní myšlenka

- numerické metody — založeny na **diskretizaci**
- čas rozdělíme na rovnoměrné intervaly délky Δt
- výpočty provádíme pouze v těchto diskrétních intervalech
- v bodech $t_n = t + n \cdot \Delta t$ počítáme hodnoty y_n
- zbytek aproximujeme (např. přímkou)





Metody aproximace

hodnotu y_{n+1} aproximujeme s využitím hodnoty y_n :

- **Eulerova metoda**: použití diferenčních rovnic, které jsme výše zmínili, tj. $y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(y_n, t)$
- **Runge-Kutta metody** (2. řádu, 4. řádu): sofistikovanější metody aproximace; vyžadují více operací, ale jsou o hodně přesnější

Se zmenšujícím se Δt metody konvergují k přesnému řešení. Čím menší je Δt tím je simulace výpočetně (a tedy i časově) náročnější.

Figure 13-5

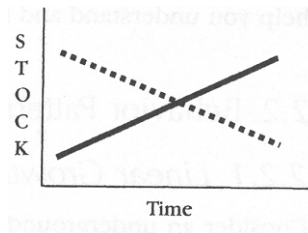
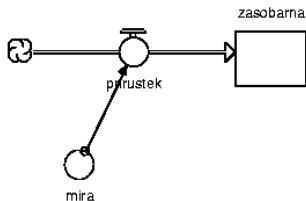
Comparison of Euler's, 2nd-Order, and 4th-Order Runge-Kutta

Time	Exact Value	Euler's Method	2nd-Order Runge-Kutta	4th-Order Runge-Kutta
	$(100 * e^{-0.5 * time})$	$(dt = 0.025)$	$(dt = 0.05)$	$(dt = 0.1)$
0	100.000000	100.000000	100.000000	100.000000
0.1	95.122942	95.032371	95.123447	95.122943
0.2	90.483742	90.426732	90.484702	90.483742
0.3	85.070798	85.939465	86.072168	85.070798
0.4	81.873075	81.759933	81.874813	81.873076
0.5	77.880078	77.757464	77.882145	77.880079
0.6	74.081822	73.941383	74.084181	74.081823
0.7	70.468809	70.313533	70.471427	70.46881
0.8	67.032005	66.853223	67.034851	67.032006
0.9	63.762815	63.53223	63.765861	63.762817
1.0	60.653066	60.452232	60.656285	60.653068

Výběr metody: doporučení

- Runge-Kutta metoda není vhodná pro modely, které obsahují nějaké diskrétní prvky.
- Na čistě spojitých modelech je vhodnější používat metodu Runge-Kutta.
- Eulerova metoda může být hodně nepřesná u modelů, které vykazují vysokofrekvenční oscilace.
- Zvolený diskrétní krok δt (v softwaru Stella značený DT), by měl být maximálně polovina minimálního intervalu vyskytujícího se v modelu. Vždy je lepší vyzkoušet simulaci s několika různými hodnotami δt .

Lineární vývoj



charakteristika

zpětná vazba

diff. rovnice

explicitní řešení

příklad

změna konstantní rychlostí

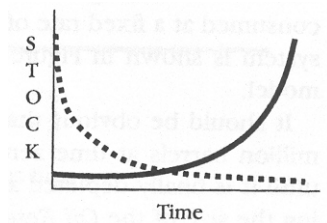
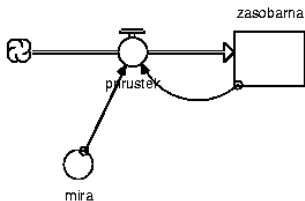
žádná

$$dR/dt = k$$

$$R(t) = R_0 + kt$$

fixní čerpání neobnovitelného zdroje

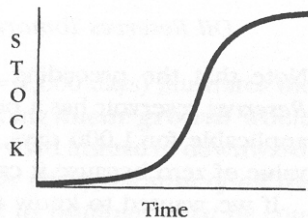
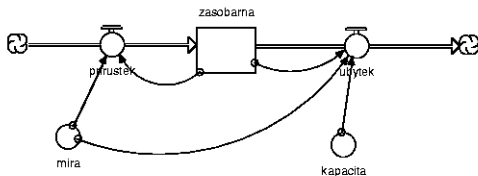
Exponenciální vývoj



charakteristika
zpětná vazba
diff. rovnice
explicitní řešení
příklad

rychlost změn úměrná velikosti zásobárny
pozitivní zpětná vazba
$$\frac{dR}{dt} = k \cdot R(t)$$
$$R(t) = R_0 \cdot e^{kt}$$
populační růst při neomezených zdrojích

Logistický vývoj



charakteristika

nejdříve exponenciální růst, následovaný přibližováním k rovnováze (kapacita C)

zpětná vazba

kombinace pozitivní a negativní zpětné vazby

diff. rovnice

$\frac{dR}{dt} = k(t) \cdot R(t)$, kde $k(t) = k_0 \cdot (1 - \frac{R(t)}{C})$

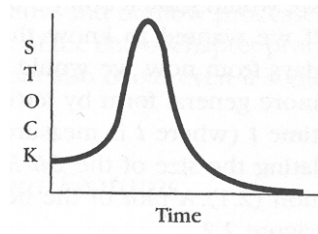
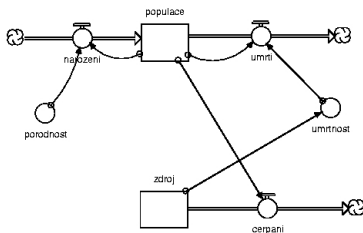
explicitní řešení

$R(t) = \frac{C}{1 + Ae^{-k_0 t}}$, kde $A = \frac{C - R_0}{R_0}$

příklad

populační růst s fixními zdroji, epidemie (vyléčitelná nemoc), šíření informací

Přestřel a kolaps



charakteristika

dvě zásobárny, jeden neobnovitelný, druhý na něm závisí a spotřebovává jej

zpětná vazba

kombinace pozitivní a negativní zpětné vazby

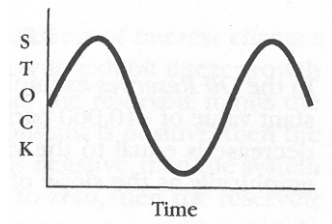
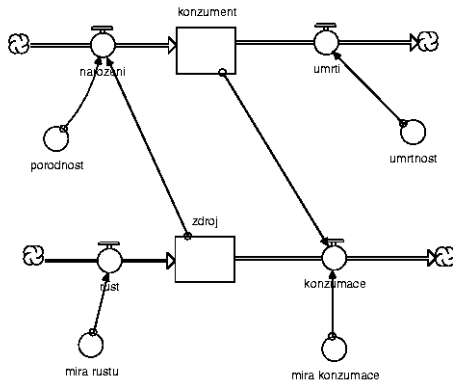
diff. rovnice

-

příklad

populační růst s neobnovitelnými zdroji, epidemie (nevléčitelná nemoc)

Oscilace



Oscilace (pokračování)

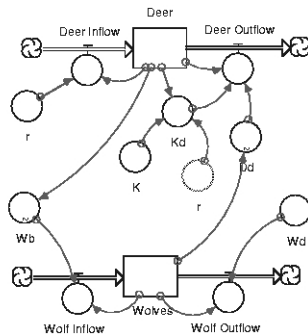
charakteristika	dvě vzájemně závislé zásobárny (Consument source R)
zpětná vazba	negativní zpětná vazba (se zpožděním)
diff. rovnice	$dC/dt = k_G R(t) - k_D$ $dR/dt = k_W - k_Q C(t)$
rovnováha	$C = \frac{k_W}{k_Q}, R = \frac{k_D}{k_G}$
příklad	dravec-kořist, konzument a obnovitelný zdroj, regul. loty

Vysvětlivky: k_G : růst konzumenta, k_D : úmrtí konzumenta, k_W :
růst zdroje, k_Q : konzumace zdroje

Lovec-kořist

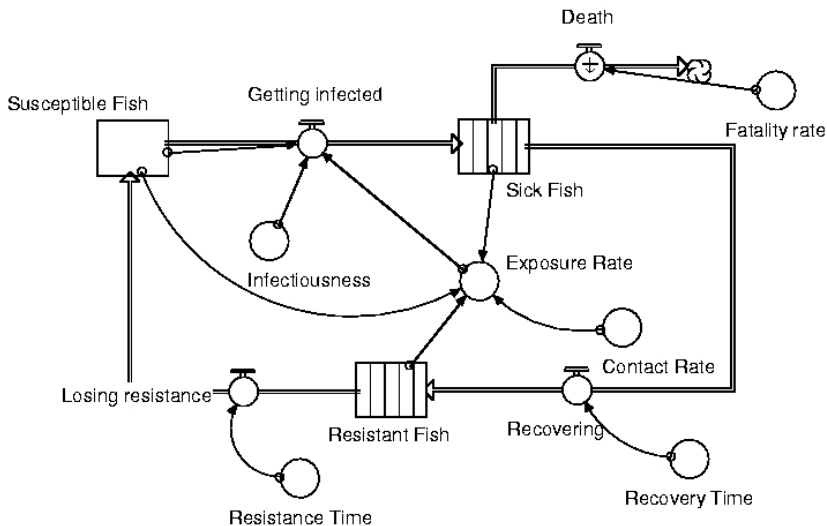
Problém: populace jelenů a vlků, vlci žerou (jenom) jeleny (přírůstek vlků závisí pouze na množství jelenů), jeleni jsou ovlivňováni vlky a kapacitou prostředí.

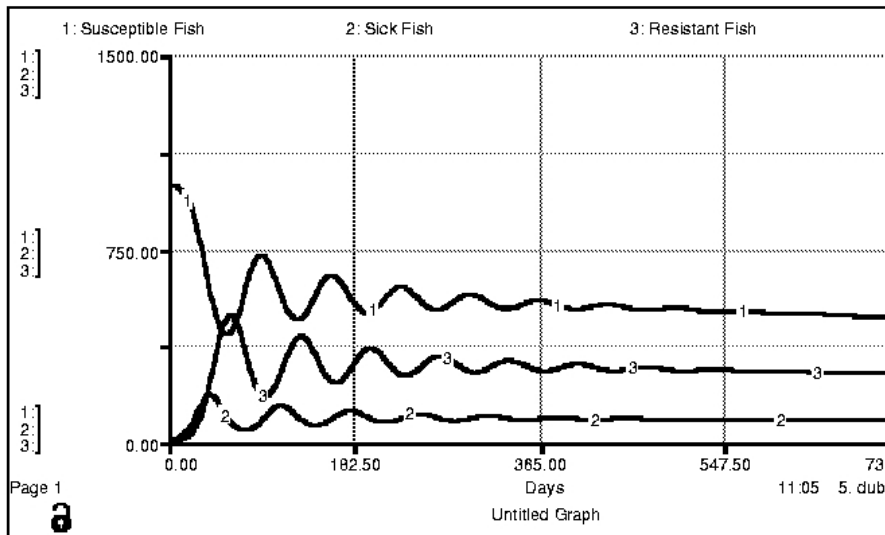
Model: kombinace
predator-kořist a logistický
růst.
Chování: oscilace.



Epidemie (rybičky)

- model epidemie SIR (susceptible - ill - resistant)
- rybičky v rybníku, každá v jednom ze tří stavů: zdravá, nemocná, odolná
- parametry epidemie: infekčnost, úmrtnost, doba nemoci, doba odolnosti





Daisy world

Účel modelu

Podpora teorie Gaia (autor J. Lovelock) - hypotéza, že živá hmota na planetě funguje jako jeden organismus, který si udržuje vhodné podmínky pro život.

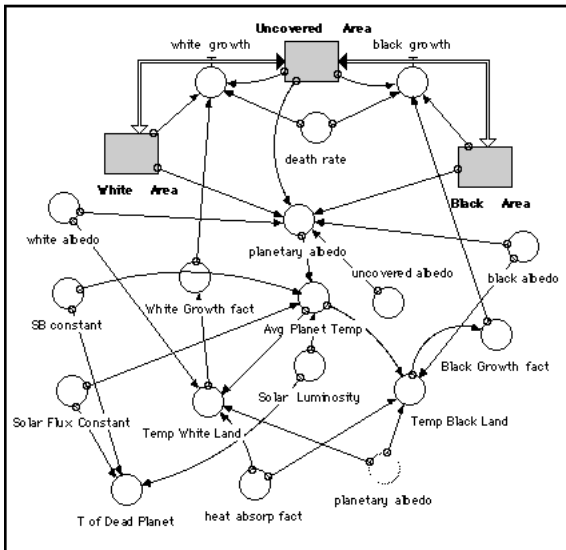
Základní myšlenka modelu

Hypotetický svět obíhající slunce, jehož teplota roste a který je schopen částečně regulovat svou teplotu.

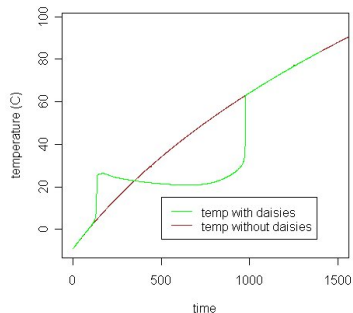
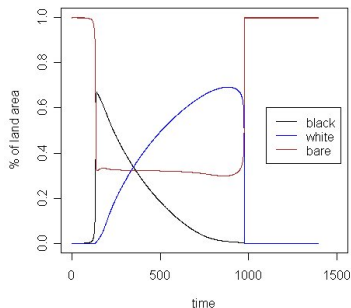
Popis modelu

- Na DaisyWorld rostou dva druhy sedmikrásek: **černé** a **bílé**.
- Obě mají **stejnou růstovou křivku** (závislou na teplotě).
- **Černé** jsou sami o sobě teplejší a **absorbují** teplo.
- **Bílé** teplo odráží.
- Sedmikrásky tedy mění **albedo** planety a tím ovlivňují teplotu planety a tedy i podmínky pro svůj vlastní růst (zpětná vazba!).

Daisyworld



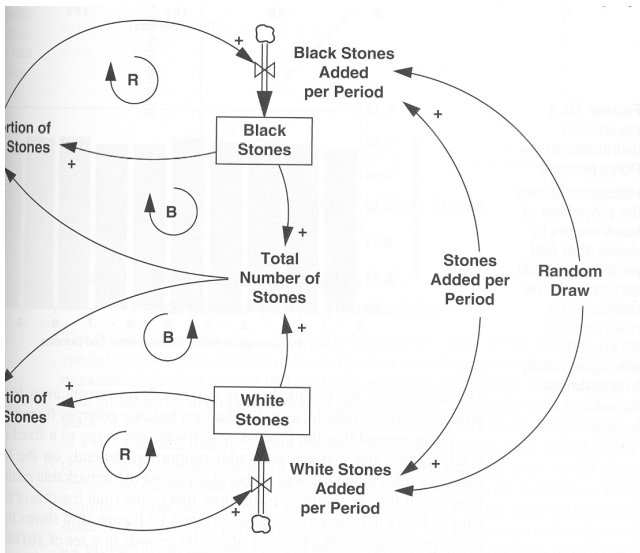
Chování modelu



Chování: překvapivě stabilní, dosahuje *homeostasis* (schopnost udržovat rovnováhu pomocí regulačních mechanismů)

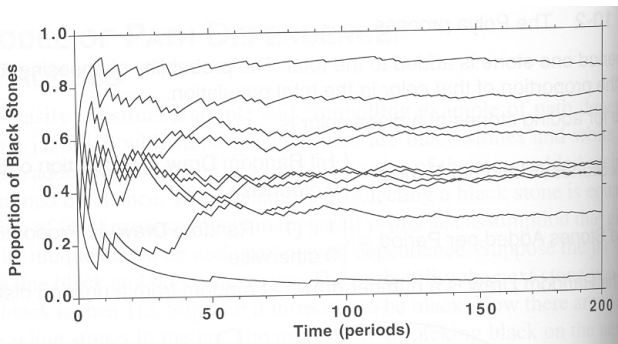
Polya process

- Máme pytel s **černými** a **bílými** kameny, postupně taháme kameny.
- Pravděpodobnost, že **vytáhneme černý** je přímo úměrná podílu dosud **vytažených černých** kamenů.
- Zajímá nás **poměr** vytažených černých/bílých v **dlouhodobém** horizontu.



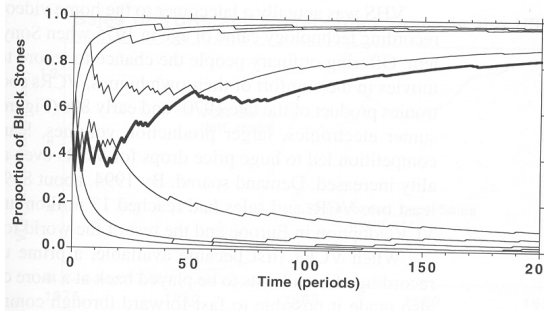
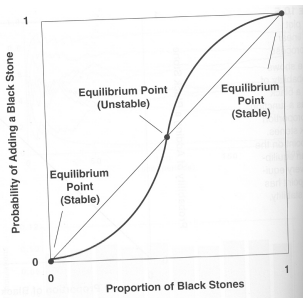
Chování

Počáteční náhodné tahy stanoví určitý poměr, ke kterého se systém poté nadále drží (lze dokázat též analyticky).



Variace

pravděpodobnost vytažení je nelineárně závislá na poměru kamenů \Rightarrow poměr konverguje k 0 nebo 1



Polya process: komentáře

- **lock-in**: systém se *zamče* do určité konfigurace aniž by k tomu byl nějaký apriory důvod
- typický příklad systému řízeného **pozitivní zpětnou vazbou**
- o osudu rozhodují **náhodné výchyly** na počátku, existence řádu však není díky náhodě, je zaručena pozitivní zpětnou vazbou
- typický praktický příklad: dvě firmy soutěží o dominanci na trhu se stejným produktem, např. videokazety (VHS X Betamax)
- další příklady: Wintel, QWERTY, Silicon Valey

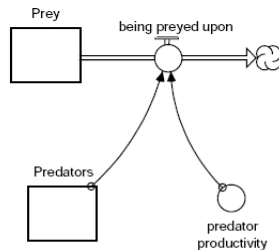
Návrhové vzory

Často používané prvky v modelech.

- externí zdroj
- souběžný tok
- vyčerpávající tok
- přizpůsobovací tok
- násobící tok

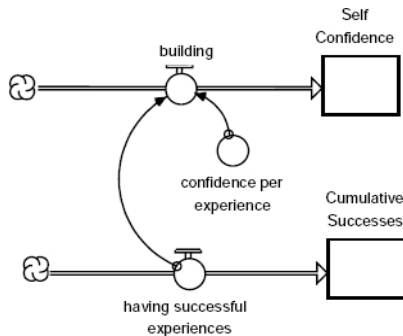
Externí zdroj

Nějaká jiná zásobárna, než ke které je tok připojen, je zdrojem tohoto toku. Tato zásobárna má přidruženou produktivitu, která určuje velikost toku.



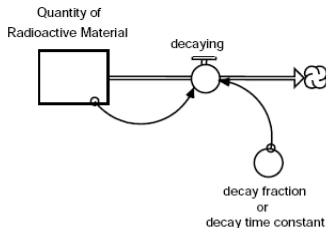
$$\begin{array}{ccccc} \text{being preyed upon} & = & \text{Predators} & * & \text{predator productivity} \\ \text{(prey/time)} & & \text{(predators)} & & \text{(prey/predator/time)} \end{array}$$

Souběžný tok



$$\begin{array}{lll}
 \text{building} & = & \text{having successful experiences} * \text{confidence per experience} \\
 (\text{confidence/time}) & & (\text{experiences/time}) \quad (\text{confidence/experience})
 \end{array}$$

Vyčerpávající tok

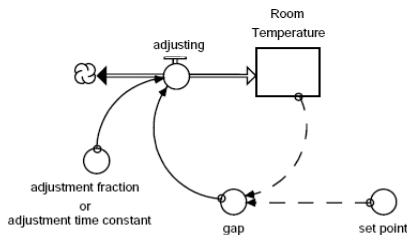


$$\begin{array}{lcl} \text{decaying} & = & \text{Quantity of Radioactive Material} * \text{decay fraction} \\ \text{(material/time)} & & \text{(material)} \quad \text{(fraction/time)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{decaying} & = & \text{Quantity of Radioactive Material} / \text{decay time constant} \\ \text{(material/time)} & & \text{(material)} \quad \text{(time)} \end{array}$$

Vyčerpávající tok reprezentuje pasivní rozklad nějaké zásobárny. Velikost toku je úměrná zásobárně, ze které proudí.

Přizpůsobovací tok

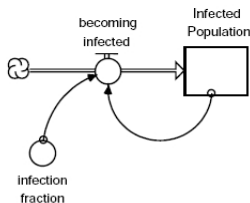


$$\begin{array}{lcl} \text{adjusting} & = & \text{gap} * \text{adjustment fraction} \\ \text{(degrees/time)} & & \text{(degrees)} \quad \text{(fraction/time)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{adjusting} & = & \text{gap} / \text{adjustment time constant} \\ \text{(degrees/time)} & & \text{(degrees)} \quad \text{(time)} \end{array}$$

Přizpůsobovací tok využíváme, pokud se obsah zásobárny přizpůsobuje nějakému zadané cílové hodnotě (zadané jinou zásobárnou nebo parametrem).

Násobící tok



$$\begin{array}{lll} \text{becoming infected} & = & \text{Infected Population} * \text{infection fraction} \\ \text{(people/time)} & & \text{(people)} \quad \text{(people/person/time)} \end{array}$$

Násobící tok používáme pro sebe-urychlující růstové procesy. Tok je generován zásobárnou, do které proudí.

Zpoždění

Zdroje zpoždění:

- měření informací o systému (např. detekce znečištění)
- rozhodování
- implementace, realizace změn

Realizace: např. DELAY funkce

Fronty a spol.

Lze uvažovat i sofistikovanější typy zásobáren (než základní, které umožňují pouze držet jednu hodnotu), např. software Stella umožňuje:

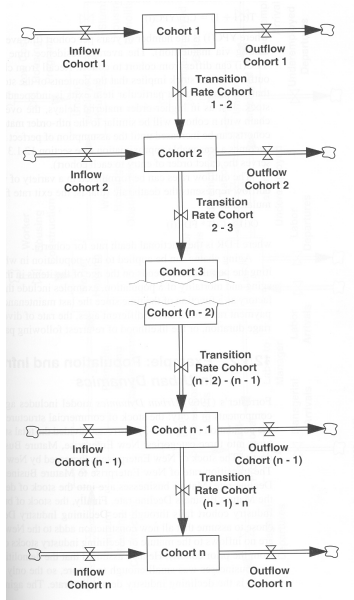
- dopravní pás (conveyor) - co do něj vejde, to (za nějaký čas) zase vyjede; využití např. pro zpoždění
- fronta (queue), trouba (oven) - užitečné pro „Discrete even modeling“, mimo náš záběr

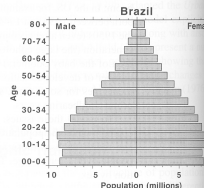
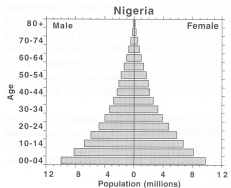
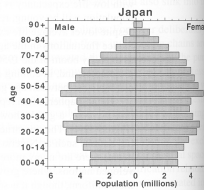
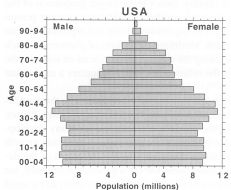
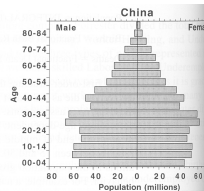
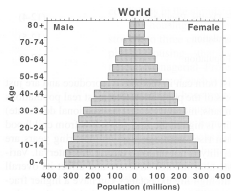
Rozklad zásobáren

(disaggregation of stocks, age cohorts)

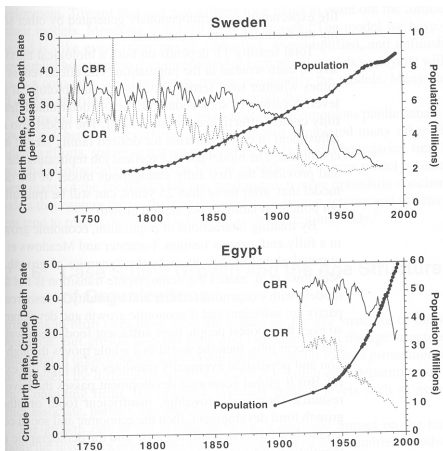
Typickým modelovacím prvkem je rozklad určité zásobárny na několik podzásobáren, kterými elementy sekvenčně prochází.

- populace: věkové skupiny
- zaměstnanci: postavení ve firmě, akademické tituly
- CFC, pesticidy
- finance: solventnost klientů





Demografický přechod



Cíle analýzy

- Je (jak moc) model správný/vhodný/použitelný... ?
- Jakou roli hrají jednotlivé prvky modelu?
- Které prvky modelu mají největší vliv na jeho chování?
- Jaké je chování modelu za změněných (měnících se) podmínek?

Kontrola validity

- **strukturní validita**: kontrola, že vztahy definované v modelu odpovídají vztahům v reálném systému
- **prediktivní validita**: chování modelu odpovídá chování systému
 - základní (chování modelu se základními parametry)
 - rovnováha (pokud můžeme analyticky odvodit podmínky pro rovnováhu, vyzkoušíme, zda za těchto podmínek model opravdu vykazuje rovnovážné chování)
 - run-away
- **retrodikce**: spustíme model v časovém intervalu o kterém víme, jaké v něm bylo chování systémů a kontrolujeme, zda odpovídá

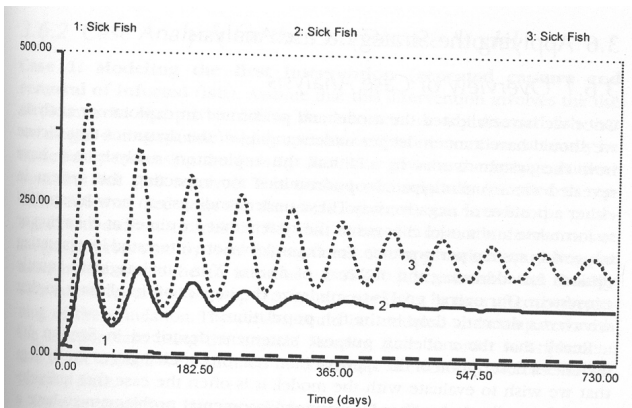
Analýza citlivosti

= *sensitivity analysis*

- určení **vlivu parametrů** (vnějších, exogenous) na chování modelu
- jak moc jednotlivé parametry ovlivňují chování modelu
- jak moc hodnoty, které jsme odhadli, ovlivňují chování modelu, a jak moc obdržené chování závisí na správnosti našeho odhadu?
- které parametry mají vysoký a které nízký vliv na chování modelu (high-leverage, low-leverage)? (důležité pro návrh „politik“ pro změnu chování popisovaného systému)

Příklad

Tři běhy s různými hodnotami jednoho z parametrů. Jedná se o parametr s vysokým vlivem: ovlivňuje výrazně velikost sledované zásobárny i její průběh (přítomnost/absence oscilací).



Změny hodnot parametrů

Zkoumáme, jak se chová model za změněných/měnících se podmínek. Cílem těchto pokusů může být:

- zkoumat vliv různých „politik“ na chování systémů (policy analysis)
- zkoumat robustnost modelu (zda se chová „rozumně“ i za jiných podmínek)

Příklady experimentů (změna určitého parametru během simulace): Puls, Ramp, Step

Puls

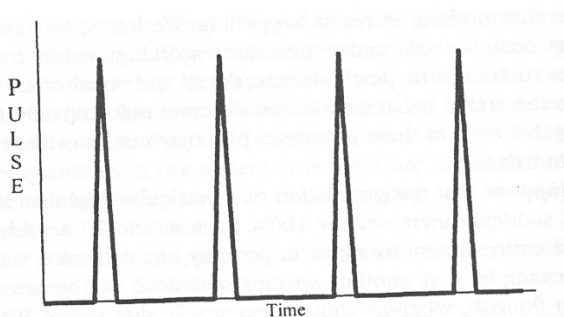
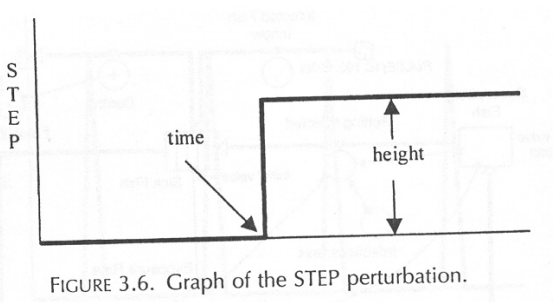
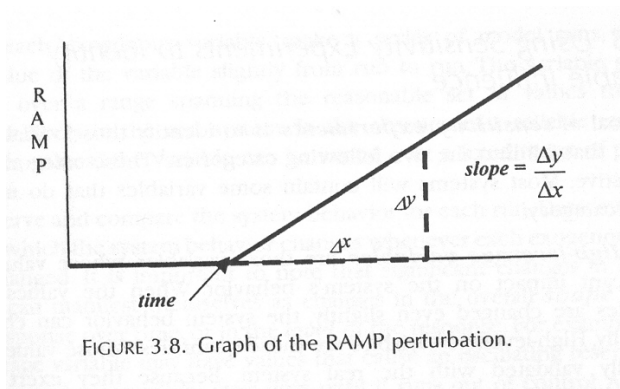


FIGURE 3.3. Graph of a PULSE perturbation.

Step



Ramp



Shrnutí

- systémový model: zásobárny, toky, parametry, vztahy
- diferenciální rovnice, numerické metody řešení
- typické vztahy, návrhové vzory
- příklady: lovec a kořist, nemocné rybičky, daisyworld, černé a bílé kuličky
- simulace, cíle a metody, analýza citlivosti