IV120 Spojité a hybridní systémy

Úvod do problematiky a informace o kurzu

David Šafránek

Jiří Barnat

Jana Fabriková

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

EVROPSKÁ UNIE

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah a cíle předmětu

- pochopení základních pojmů obecné teorie systémů
- pojem dynamického systému
- problematika lineárních a nelineárních spojitých systémů
- pojem hybridního systému
- základní metody analýzy
  - analytické metody
  - simulace
- základní pojmy teorie řízení
- aplikace v systémové biologii
- elementární praktická znalost – cvičení
  - Octave, SpaceEx, GNA

Co získám absolvováním?

- pochopení pojmů a problémů z oblasti dynamických systémů
- schopnost použít procvičované nástroje
- schopnost použít základní analytické techniky
- pochopení základního aparátu systémových věd
- schopnost formálně zapsat spojitý/hybridní systém
- rozšíření vědomostí v oblasti komplexních systémů

Co se zde nenaučím...

- podrobné formální odvození teoretických východisek
- podrobnou znalost nástrojů
- podrobnou znalost výpočetních algoritmů
- schopnost systémového myšlení
- ...

Osnova

- Úvod do teorie systémů.
- Definice a vlastnosti dynamického systému.
- Lineární spojité systémy a jejich analýza.
- Nelineární spojité systémy a jejich analýza.
- Hybridní systémy a jejich analýza.
- Hybridní kvocienty nelineárních spojitých systémů.
- Parametrizace, neurčitost, identifikovatelnost.
- Srovnávání a robustnost chování; dekompozice.
- Úvod do teorie řízení.
- Aplikace v biologii.

Kontext v rámci ostatních předmětů

Zařazen do povinně volitelných předmětů magisterského programu Bioinformatika.

- PB050 Modelování a predikce v systémové biologii
  - praktické seznámení s dynamickými modely v systémové biologii
  - povrchní úroveň – důraz na intuitivní pochopení pojmů
  - aplikační doplněk (předch. absolvování je výhodou)
  - semestrální projekty
- PA052 Úvod do systémové biologie
  - úvod do aplikační oblasti systémové biologie
  - přehledový kurz
- PA054 Formální modely v systémové biologii
  - alternativní možnosti sémantiky (operační pohled)
  - formální metody pro biologické dynamické systémy
  - semestrální projekty

Kontext v rámci ostatních předmětů

- IV109 Modelování a simulace (doc. R. Pelánek, Ph.D.)
  - uchopení systémového přístupu
  - mentální cvičení systémového myšlení
  - modelování a simulace na obecné a přehledové úrovni
- IA158 Real time systems (RNDr. T. Brázdil, Ph.D.)
  - návrh, implementace a verifikace systémů reálného času
  - časové automaty
  - nástroj UPPAAL
- PA190 Digital Signal Processing
  - diskrétní technické (lineární) systémy
  - zpracování digitálních signálů
  - přenos do frekvenčního spektra

Kontext v rámci ostatních předmětů

- DBLOK2 Formal Methods for Complex Systems (Dr. L. Bortolussi, Ph.D.)
  - pokročilé formální metody
  - stochastický hybridní model
  - hybridní limity stochastických modelů
  - plánováno na jaro 2014

Literatura

Základní literatura:

- ŠTECHA, Jan a HAVLENA, Vladimír. Teorie dynamických systémů: přednášky. 2. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002.
- VRIES, Gerda de. A course in mathematical biology :quantitative modeling with mathematical and computational methods. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

Doplňující literatura:

- J.H. van Schuppen. Control and System Theory of Positive Systems, CWI Lecture notes, 2007.
- P. Tabuada. Verification and Control of Hybrid Systems: A Symbolic Approach. Springer, 2009.

Hodnocení

- semestrální projekt – 50 bodů
  - seznámení s konkrétním modelem
  - provedení analýzy (stabilita, dosažitelnost)
- zkouška – 50 bodů
  - na konci výukového období bude vydán seznam pojmů, které budou zkoušeny
  - zkouška bude zahrnovat vysvětlení 2 pojmů
- kolokvium
  - stačí získat 30 bodů (není nutno absolvovat ústní zkoušku)

Základní pojmy obecné teorie systémů

- obecný pojem **systému** jako prostředníka porozumění složitých (komplexních) jevů
- myšlenku zavedl von Bertalanffy v 30. letech 20. stol.
- složitost vzniká silnou nezanedbatelnou **interakcí uvnitř celku** (mezi složkami) a **vně** (interakce s okolím)
- rozvoj v 50. a 60. letech (Kálmán a Mesarovič)
- podstatou je chápání jevů komplexně ve vnitřních i vnějších souvislostech (srovnej s mechanickým pohledem)



- samostatný teoretický vědní obor definující obecné paradigma
- předmětem je studium **systémů** definovaných na různých **objektech**
- systémové teorie
  - teorie řízení, kybernetika (dříve)
  - teorie systémů
- systémové aplikace
  - systémová biologie
  - systémová chemie
  - systémové inženýrství
  - systémová psychologie
  - ...

- předmětem zkoumání je vymezená oblast objektivní reality – **objekt**
  - např. živá buňka, skákající míček, jaderná elektrárna, výrobní linka, el. obvod, ...
- zbytek objektivní reality (doplněk objektu) nazýváme **okolí**
  - hranice typicky není přesně vymezitelná (přírodní objekty)
- objekt je zkoumán prostřednictvím pozorovatelných/měřitelných **veličin**
- vztahy mezi veličinami jsou determinovány vlastnostmi objektu

- **systém** je definován na objektu výběrem veličin a sledovaných vlastností (srovnej s pojmem systému v abstraktních vědách – veličiny i vztahy mezi nimy uvedeny explicitně)
- systém je určen:
  - **množinou veličin**
  - **rozlišovací úrovní** – přesnost pozorování (např. frekvence vzorkování)
  - **chováním** – vztahy mezi veličinami
- množina hodnot všech veličin sledovaných po danou dobu zkoumání popisuje **aktivitu (běh) systému**
- např. systém na objektu živé buňky – veličiny jsou koncentrace detekovatelných látek měřené s rozlišovací schopností použité technologie, aktivita takového systému vykazuje např. zvýšení koncentrace některých proteinů při odebrání určitého nutrientu, chováním je pak tento vztah proteinů a nutrientu

- při zkoumání systému se snažíme dekomponovat chování
- rozložení každého komplexního vztahu na množinu jednodušších (dílčích) vztahů
- dílčí vztahy jsou asociovány se složkami systému (podsystémy, tzv. **elementy**)
- celkové chování systému je určeno:
  - chováním jednotlivých elementů
  - vzájemnými kompozicemi chování elementů
- elementy jsou spojeny sdílenými veličinami, tato spojení determinují **vazby uvnitř systému**
- toto členění určuje **strukturu systému**
- okamžitou hodnotu všech veličin nazýváme **stavem systému**

Uvažujme systém definovaný na objektu populace živých buněk.

Veličiny

velikost populace, koncentrace nutrientů, teplota

Aktivita

vývoj populace, změna stavu prostředí

Chování

vztah mezi veličinami prostředí a velikostí populace

Elementy

proteiny a metabolity různých typů, DNA, RNA, . . . ,
příslušné vnitřní veličiny (koncentrace),
vazby – transkripční aktivace/represe, katalýza, apod.

- Systém je dán množinou n veličin (tzv. **proměnných**)

$$\mathcal{S} = \{X_1, \ldots, X_n\},$$

kde každá z proměnných má definovánu **množinu přípustných hodnot**:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}. \mathcal{D}(X_i) = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir_i}\}$$

kde r_i určuje velikost příslušné množiny (teoreticky mohou být definovány tyto množiny i jako spojité, prakticky se uvažují vždy diskrétní vzhledem k rozlišovací schopnosti pozorování).

- Takto definovaný systém se nazývá **zdrojový systém**.

Příklady

- populace živých buněk – fáze populace (exponenciální, stacionární), hmotnost populace měřená s určitou přesností
- systém počasí v dané lokaci – čas měření (ráno, večer), teplota vzduchu měřená s danou přesností, relativní vlhkost, . . .

Základní pojmy
Možné definice systému

- Zdrojový systém lze doplnit daty popisujícími jeho aktivity.
- S tímto rozšířením je systém definován jako uspořádaná množina dvojice proměnných a tzv. pole aktivit:

$$\mathcal{S} = (\{X_i, i = 1, 2, ..., n\}, [x_{i,t}])$$

kde

$$[x_{i,t}], x_{i,t} \in \mathcal{D}(X_i)$$

je **matice (pole) aktivit**, $t \in T$ značí čas měření v časové množině T.

- Takto definovaný systém se nazývá **datový systém**.

Příklady

- populace živých buněk – fáze populace a hmotnost populace zachycená při experimentu trvajícím určitou dobu
- systém turbovrtulového motoru – časová řada hodnot veličin při provedeném letu (palivo, otáčky, nadmořská výška)

- Zdrojový systém lze doplnit popisem vztahů mezi veličinami – generativním předpisem.
- Tímto rozšířením je zdrojový systém $\mathcal{S} = \{X_1, ..., X_n\}$ rozšířen o relaci

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{D}(X_1) \times \mathcal{D}(X_2) \times ... \times \mathcal{D}(X_n).$$

  Relace může být určena např. diferenčními nebo diferenciálními rovnicemi.
- Takto definovaný systém se nazývá **generativní systém**.

Příklady

- katalytická reakce (přeměna substrátu na produkt)

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{V_{max}S}{K+S} \qquad \frac{dP}{dt} = \frac{V_{max}S}{K+S}$$

  - S ... koncentrace substrátu
  - P ... koncentrace produktu
  - K, k, V_{max} ... konstanty zachycující vlastnosti enzymu a substrátu

Další možnosti definice systému jsou:

(1) strukturální: pomocí elementů a vazeb mezi nimi
(2) stavově přechodová: systém určen množinou stavů a přechodů mezi nimi

Příklady

(1) systém udržování hladiny v nádrži – elementy: snímač výšky hladiny, čerpadlo, regulátor otáček čerpadla
(2) systém světelné křižovatky – stavy jsou jednotlivé konfigurace světel s jasně definovanými přechody

- **nezávislé veličiny** – veličiny produkované okolím, které jsou příčinou jevů v systému
- **závislé veličiny** – veličiny produkované systémem, odvozené z nezávislých veličin a chování systému
- časová orientace (tzv. směr kauzality) je dán uspořádáním množiny {příčina, následek}
  - u fyzikálních systémů (konečná rychlost) příčina vždy předchází následek

- jsou-li separovatelné veličiny produkované okolím od veličin produkovaných systémem, používáme členění na **vstupní** a **výstupní veličiny** (zkráceně **vstupy** a **výstupy systému**)
- příkladem jsou technické systémy (např. el. obvody)
- jelikož vstupy ovlivňují chování (a aktivitu) systému, hovoříme o vstupních veličinách jako o **řídících veličinách**
- systémy s neprázdnou množinou řídících (vstupních) veličin nazýváme **řízené systémy**, v opačném případě hovoříme o **neřízených systémech** (někdy také volné nebo neutrální systémy)
  - srovnej systémy např. v ekonomii nebo meteorologii se systémy v inženýrství
  - do jaké kategorie spadá biologický systém?

- otevřenost – se separovatelností vstupů/výstupů souvisí charakter vztahu systému s okolím
  - **uzavřený systém** = neřízený systém
  - **otevřený systém** = řízený systém
- ohraničenost – ohraničený systém má konečnou množinu veličin (konečný řád)
  - srovnej přírodní evoluční vývoj a technický systém
  - ohraničenost lze docílit určením časového horizontu (např. generace buňky)

- statické vs. dynamické systémy
  - **statický systém** – bez paměti (hodnoty vnitřních a výstupních veličin určeny okamžitými hodnotami vstupů)
  - **dynamický systém** – s pamětí (okamžitá hodnota vnitřních veličin závisí na okamžitých i minulých hodnotách vstupů)
  - **ancipativní systémy** – dynamický systém s předvídáním, navíc závislost na budoucích hodnotách (fyzikálně nerealizovatelné; příkladem je evoluce, existují studie, které pokládají za ancipativní systém lidský mozek - Robert Rosen)

- spojité vs. diskrétní systémy
  - dle povahy veličin – **spojité/diskrétní v úrovni (ve stavech)** (discrete-state)
    - teoretické modely spojité, číslicová reprezentace vždy diskrétní (vzorkování, kvantování)
  - dle chápání času – **spojité/diskrétní v čase** (discrete-time)
    - spojitá nebo diskrétní časová množina
    - např. systém vývoje populace uvažovaný po generacích vs. systém střídavého servomotoru
  - kombinace spojitých a diskrétních veličin (nebo úseků času) – **hybridní systém**
    - vzniká spojením aktivity ve spojitém čase s aktivitou v diskrétním čase

- spojitý v čase i ve stavech – matematické kyvadlo, střídavý servomotor, . . .
- diskrétní v čase, spojitý ve stavech – populace ovocných mušek v uzavřeném kontejneru (čas uvažován v generacích, velikost populace poměrem zaplněného prostoru vůči objemu kontejneru)
- výše uvedené typy systémů vykazují dynamické chování, které lze zachytit stavovými rovnicemi
    - popis závislosti okamžitého stavu na paměti
    - použití diferenčních nebo diferenciálních rovnic (implicitní popis přechodové struktury)

Základní pojmy

Základní atributy systémů – příklady – matematické kyvadlo

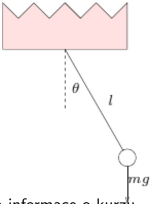
- pohyb určen vývojem úhlu odklonu θ od vertikální (klidové) polohy
- určeno pohybovou (diferenciální) rovnicí

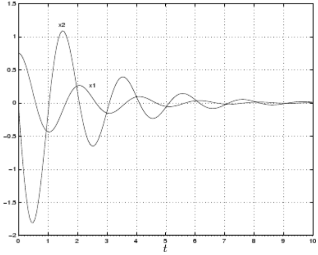
$$ml\ddot{\theta} + dl\dot{\theta} + mg\sin(\theta) = 0$$

  kde m ...hmotnost h.b., l ... délka závěsu, d ... faktor disipace

- určíme-li jako vnitřní veličiny $x_1 = \theta$ a $x_2 = \dot{\theta}$, dostaneme soustavu:

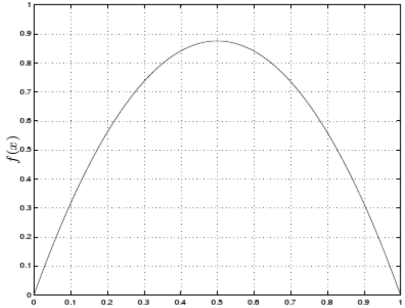
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} sin(x_1) - \frac{d}{m} x_2$$





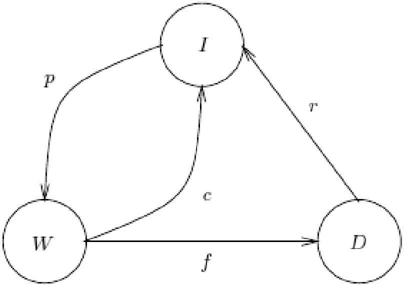
- model fluktuací populace ovocných mušek v nádobě při konstantním (limitovaném) přísunu potravy
- časovou jednotkou je generace
- vnitřní veličinou x je množství populace vyjádřené vzhledem k objemu nádoby (předpokládáme $0 \leq x \leq 1$)
- přechodová struktura vyjádřena implicitně diferenční rovnicí:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k) = f(x_k)$$



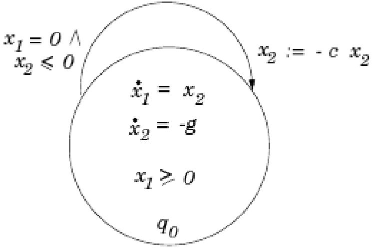
http://www.enm.bris.ac.uk/staff/hinke/courses/math5337/ds/applets/iteration/Iteration.html

- diskrétní v čase, diskrétní ve stavech – výrobní linka se stavy { pohotovost, činnost, porucha }, přechody jako reakce na diskrétní události { zpracováno, porucha, opraveno }
  - zásadním charakteristickým prvkem je diskrétní vstupní veličina charakterizující diskrétní události
  - výskyt událostí uvažován v diskrétním čase
  - odpovídá většině "human-made" systémů (SW, komunikační protokoly, . . .)

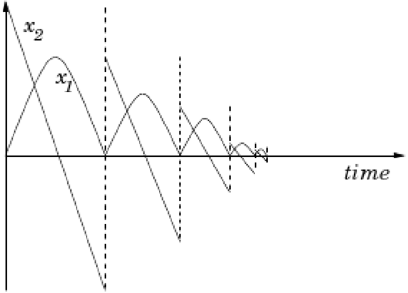


- vnitřní veličina X charakterizující stav systému: $\mathcal{D}(X) = \{I, W, D\}$
  - I ... pohotovost, W ... činnost, D ... porucha
- vstupní veličina U charakterizující diskrétní události: $\mathcal{D}(U) = \{p, c, f, r\}$
  - p ... požadavek, c ... zpracováno, f ... porucha, r ... oprava
- přechodová struktura určena schematem

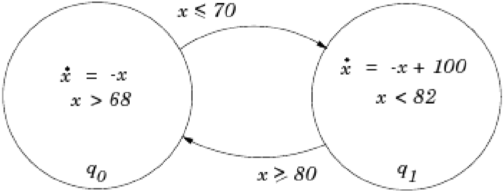
- spojitý v čase, diskrétní ve stavech – např. systém sledující počet diskrétních událostí v určitém časovém intervalu
  - úroveň zdrojového nebo datového systému (např. Poissonův proces), nelze vyjádřit přímo stavovými rovnicemi ani konečnou přechodovou strukturou, používají se statistické modely
  - do této kategorie lze řadit systémy reálného času (např. semafor), používá se rozšířeného formalismu pro popis přechodové struktury (časové automaty)
- hybridní – termostat, skákající míček
  - zobecnění předchozích kategorií
  - spojení diskrétních událostí a spojité dynamiky
  - nemusí nutně zahrnovat diskrétní veličinu – viz skákající míček
  - klíčová charakteristika je výskyt diskrétních událostí, které porušují spojitost aktivit na jednotlivých veličinách
  - rozšířený popis přechodové struktury – hybridní automat



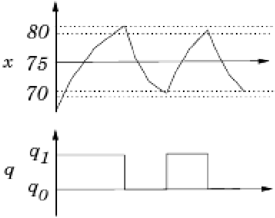
$x_1 = 0 \wedge$
$x_2 \leq 0$
$x_2 := -c\ x_2$
$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -g$
$x_1 \geq 0$
q_0



x_2
x_1
$time$



$x \leq 70$
$\dot{x} = -x$
$x > 68$
q_0
$\dot{x} = -x + 100$
$x < 82$
q_1
$x \geq 80$



80
x
75
70
q_1
q
q_0

- typicky se označením spojitý/diskrétní systém rozumí způsob zachycení času (discrete-time vs. continuous-time dynamics)
- čas lze chápat jako jednu z veličin systému, popsanou jednoduchou stavovou rovnicí – konstantní diferenční nebo diferenciální rovnicí
- systém zadaný diferenciální rovnicí vykazuje spojité aktivity
- hybridnost vzniká kombinací spojitých a diskrétních aktivit
  - dosaženo kombinací spojité a diskrétní dynamiky na úrovni elementů systému (element teploty a element přepínače v termostatu)
  - zavedením diskrétních vstupů (řízení) do spojité dynamiky (diskrétní událost odrazu míčku)

Základní pojmy
Bouldingova klasifikace systémů

Třída	Název třídy	Typ systému	Typické nové vlastnosti
1	statická struktura	strukturní vzorec látky	
2	mechanický systém	hodinový stroj	dynamický deterministický pohyb
3	kybernetický systém	regulační obvod	zpětná vazba, zpracování informace
4	otevřený systém	buňka	látková výměna, samoreprodukce
5	genetický systém	rostlina	diferenciace částí
6	zoologický systém	zvíře	cílové chování, představy
7	systém lidského jedince	člověk	vědomí, vytváření symbolů
8	sociální systém	město	vytváření rolí, systém hodnot
9	transcendentní systém		nepoznatelnost

- důležité: prostředky pro popis nižších systémů nelze použít pro vyšší systémy
- aparát pro systémy třídy 5 a vyšší není vyvinut!
- Kenneth Boulding (1956) – `http://www.panarchy.org/boulding/systems.1956.html`

- charakter množiny všech stavů systémů je klíčový pro rozhodnutelnost některých problémů analýzy
- spojité systémy v čase a netriviální hybridní systémy jsou vždy nekonečně-stavové
- diskrétní systémy v čase mohou být rovněž nekonečně-stavové
    - nekonečná množina stavů (např. neohraničená Petriho síť, logistický růst)
    - nekonečná množina vstupních událostí (např. model SW)

Základní pojmy
Vlastnosti systému – stabilita

- stav systému je **rovnovážným stavem**, pokud z něj systém nepřejde do jiného stavu bez působení vnějších vlivů (např. na vstupech)
- chování systému v **okolí rovnovážného stavu** může být stabilní
  - malým vychýlením nedojde k výrazné změně chování
  - systém se nadále pohybuje v blízkém okolí rovnovážného stavu
- nestabilní okolí znamená výraznou změnu chování vedoucí ke vzdálení od rovnovážného stavu

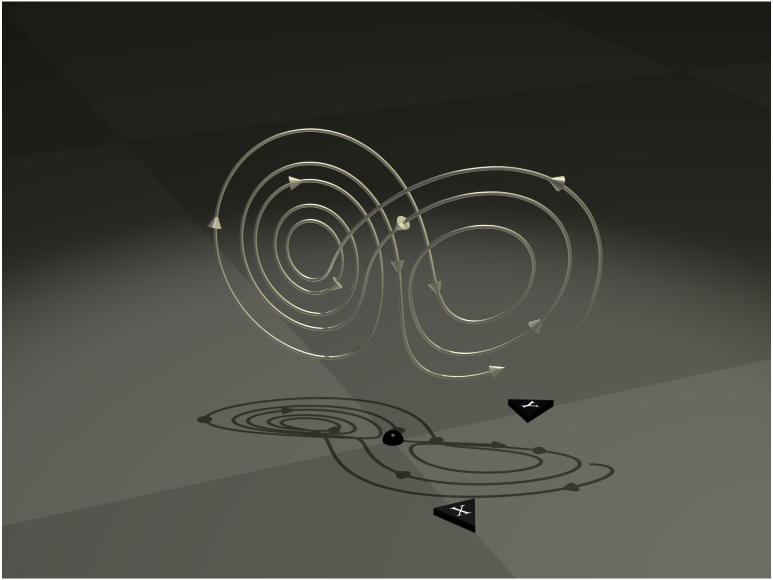
- systém je **deterministický** pokud pro daný výchozí stav a sledovaný časový úsek existuje právě jedna aktivita
- **nedeterministický** systém vykazuje různé aktivity z téhož vých. stavu
- deterministický systém vykazuje **chaotické chování**, pokud pro velmi blízké výchozí stavy generuje výrazně odlišné aktivity a obraz lib. otevřené množiny stavů v konečném čase inciduje s lib. jinou množinou stavů
- výzkum chaotických systémů vedl ke speciální oblasti teorie systémů – teorii chaosu
- chaos mohou vykazovat i zdánlivě jednoduché systémy
    - způsobeno komplexností vazeb v systému (nelineární systémy)
    - nebo neohraničeností řádu (neohraničené systémy)

- otázka stability sluneční soustavy (Laplace aplikuje teorii pravděpodobnosti a vede k popření deterministického modelu světa, přelom 18.-19.stol.)
- problém soustavy vzájemného gravitačního působení 3 a více těles
- Poincaré prokazuje možnost nestability (přelom 19.-20.stol)
  - existují neperiodické aktivity, které nedivergují ani nekonvergují ke stabilnímu stavu
  - pozorování kvalitativní změny stability při změnách parametrů systému (později základ tzv. teorie bifurkací)

- stabilitou systémů se dále zabývali Ljapunov (kritéria stability), Birkhoff (studium ergodicity) a Kolmogorov (eliptické pevné body)
- Lorenz roku 1961 při počítačové simulaci modelu pohybu vzduchu v atmosféře (12 veličin) objevil (náhodou) nestabilitu
- dále vytvořil malý model 3. řádu, který vykazuje velmi složité chaotické chování (tzv. motýlí efekt)

Základní pojmy

Chaotické chování – příklady – Lorenzův atraktor

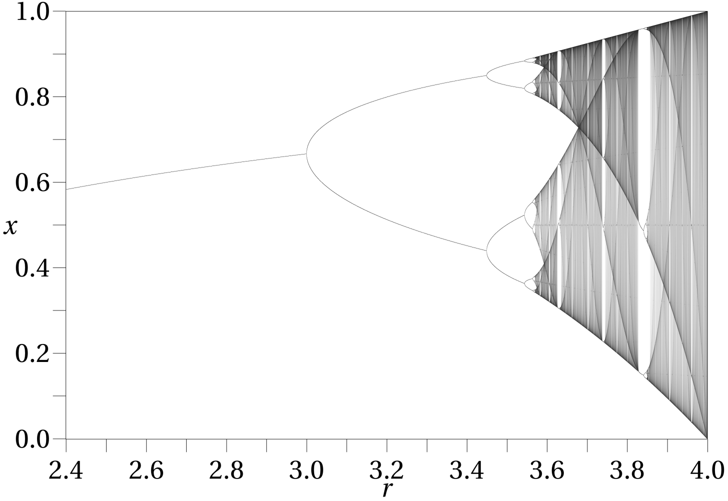


Chaotické chování – příklady

- prvním dokladem chaotického chování ve vesmíru je objev J. Wisdoma (výzkum drah planetek, 1983)
- problém tzv. Kirkwoodovy mezery
  - prostor mezi planetkami, z něhož dochází chaoticky k přenosu materiálu do kritické blízkosti Země
  - vypočítána maximální doba (200 tis. let) do níž se materiál z mezery dramaticky odchýlí ve své dráze pohybu
- dalším příkladem je rezonance oběžných dob dvou měsíců Saturnu (Hyperionu a Titanu)
  - Hyperion nerotuje kolem sve osy, pohybuje se chaoticky (další příčinou chaosu je nepravidelný tvar Hyperionu)

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k) = f(x_k)$$

- diskrétní systém logistického růstu populace s nosnou kapacitou 1 (maximální množství populace udržitelné při daném konstantním množství zdrojů)
- systém je citlivý na nastavení parametrů a iniciální podmínky
- parametr r vyjadřuje rychlost růstu populace při absenci vnitřního soupeření
- pro $3 < r \leq 4$ dochází ke komplexnímu chování (oscilace, chaos)
- důvodem je zpožděná zpětná vazba, díky níž může být překročen při diskrétním kroku rovnovážný stav (příklad nestability)
- viz cvičení
- chaotické chování není přítomno ve spojité formulaci (asymptotické chování)



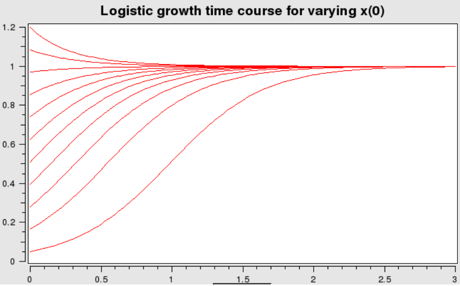
chování v dlouhočasovém horizontu (pro různá r)

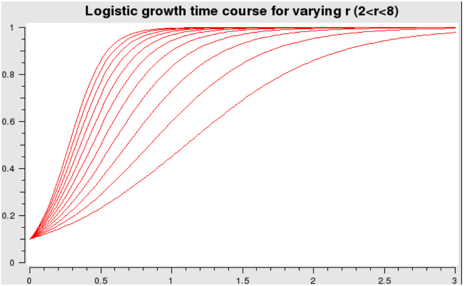
- nelineární diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x) = rx - rx^2$$

- řešení:

$$x(t) = \frac{x(0)}{x(0) + (1-x(0))e^{-rt}}$$





Proč se zabývat dynamickými systémy?

- formální matematické uchopení komplexních procesů
- zdánlivě jednoduché systémy mohou vykazovat nepředvídatelné chování
- systémy využíváme jako modely reálných objektů
- za určitých okolností lze navrhnout řízení systémů