

# Čísla a kombinatorika

Radek Pelánek

IV122, jaro 2013

- mix rozličných příkladů
- opakování základních matematických pojmů
- vesměs jednoduché programy, „rozcvička“

# Collatzova posloupnost

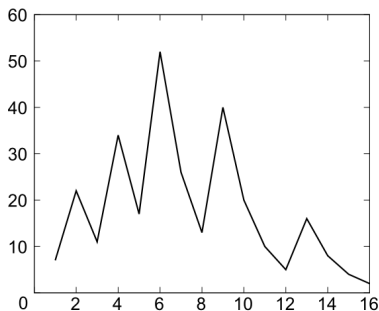
- vezmi přirozené číslo:
  - pokud je sudé, vyděl jej dvěma
  - pokud je liché, vynásob jej třemi a přičti jedničku
- tento postup opakuj, dokud nedostaneš číslo jedna

# Collatzova posloupnost: výpis

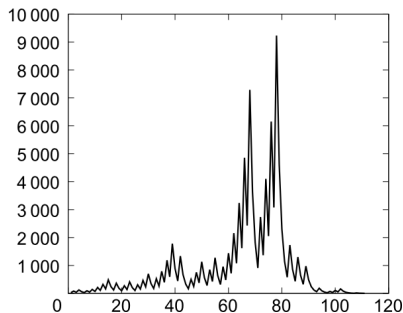
```
def collatz_vypis(n):  
    while n != 1:  
        print n,  
        if n % 2 == 0:  
            n = n / 2  
        else:  
            n = 3*n + 1  
    print 1
```

# Collatzova posloupnost: příklady graficky

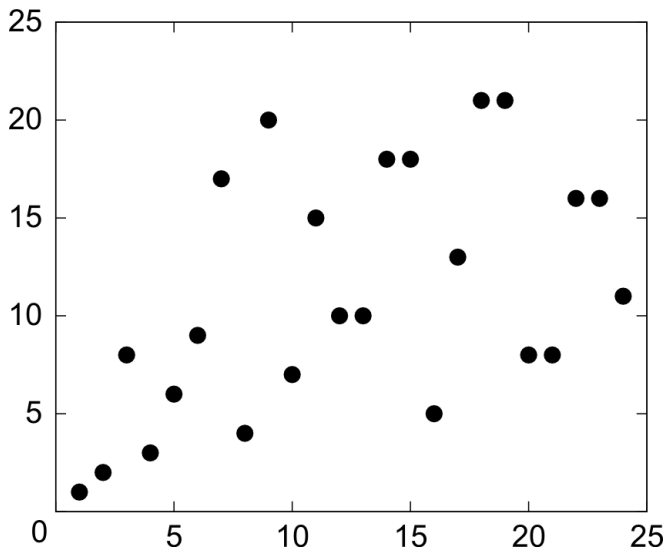
začínající číslem 7



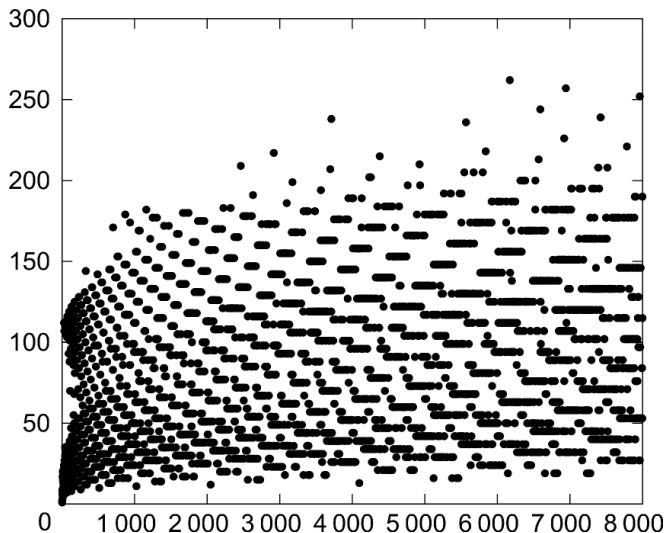
začínající číslem 27



# Collatzova posloupnost: počty kroků I



# Collatzova posloupnost: počty kroků II



# Collatzova hypotéza

- platí, že pro každé počáteční číslo  $n$ , narazí posloupnost na číslo 1?
- experimentálně ověřeno pro velká  $n$  ( $\sim 10^{18}$ )
- důkaz není znám



# Collatzova posloupnost: experimenty

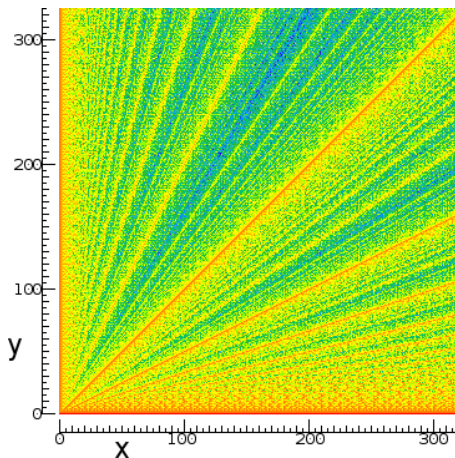
- vytvořte uvedený graf „počtu kroků“
- vytvořte analogický graf, který má na ose  $y$  „maximální číslo v posloupnosti začínající  $x$ “

# Největší společný dělitel

- Euklidův algoritmus
- $NSD(a, b) = NSD(a - b, b)$
- $NSD(a, b) = NSD(a \bmod b, b)$

```
def nsd(a,b):  
    if b == 0:  
        return a  
    else:  
        return nsd(b, a % b)
```

# Euklidův algoritmus: vizualizace



[http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm)

# Úkol: Vizualizace NSD, Euklidův algoritmus

A) Program vygeneruje obrázek vizualizující největší společné dělitele.

B) Program vygeneruje obrázek vizualizující délku běhu Euclidova algoritmu:

- počet kroků algoritmu – odčítací varianta
- počet kroků algoritmu – efektivní modulo varianta
- různé způsoby barevného znázornění (např. kombinace obou předchozích do jednoho obrázku)

# Prvočísla

- čísla dělitelná jen 1 a sebou samým
- předmět zájmu studia matematiků od pradávna
- důležité aplikace v kryptologii

# Eratosthenovo síto

- problém: výpis prvočísel od 2 do  $n$
- algoritmus: opakovaně provádíme
  - označ další neškrtnuté číslo na seznamu jako prvočíslo
  - všechny násobky tohoto čísla vyškrtni

# Eratosthenovo síto

1. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

2. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

3. krok

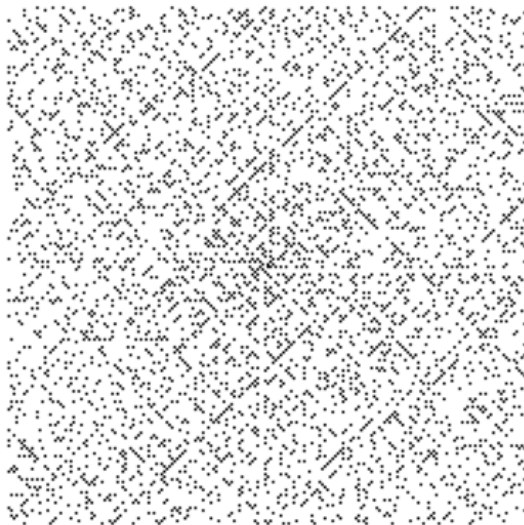
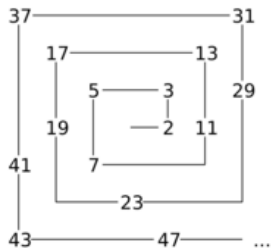
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

4. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

# Ulamova spirála

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49...

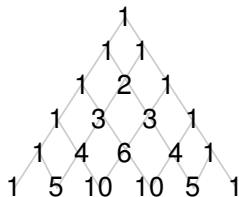




# Ulamova spirála – variace

- Jak to dopadne, když místo prvočísel budeme do spirály zakreslovat čísla dělitelná  $k$ ?
- Jaká jiná kritéria můžeme použít? Barevné obarvování?
- Co když použijeme jiný tvar mřížky?

# Pascalův trojúhelník



$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \end{array}$$

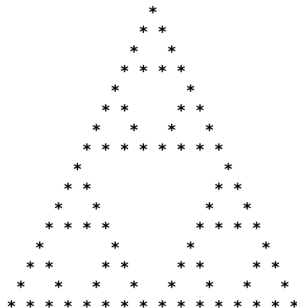
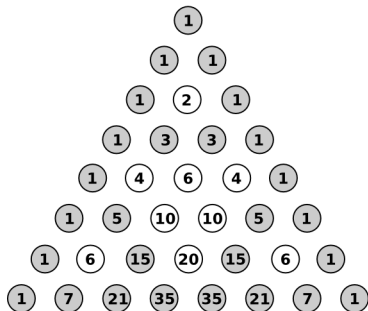
Explicitní vzorec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Rekurzivní vztah

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# Pascalův trojúhelník a Sierpińského fraktál



# Obarvování čísel: Pascal a Ulam

<http://www.khanacademy.org/cs/pascals-triangle/803149756>

- video Sick Number Games
- interaktivní obarvování Pascalova trojúhelníku
- vztah k jednorozměrným buněčným automatům

# Kombinace, permutace, variace

Daná množina  $M$  s  $n$  prvky

- 1 **permutace** = uspořádání zadaných prvků do fixního pořadí
- 2  $k$  prvkové **kombinace** = všechny možné výběry  $k$  prvků ze zadané množiny
- 3  $k$  prvkové **kombinace s opakováním** = všechny možné výběry  $k$  prvků ze zadané množiny, přičemž prvky se mohou opakovat
- 4  $k$  prvkové **variace** = všechny možné uspořádané výběry  $k$  prvků ze zadané množiny
- 5  $k$  prvkové **variace s opakováním** = všechny možné uspořádané výběry  $k$  prvků ze zadané množiny, přičemž prvky se mohou opakovat

# Kombinace, permutace, variace – příklady

Úloha	Vstup	Výstup
permutace	A, B, C	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
kombinace	A, B, C, D $k = 2$	AB, AC, AD, BC, BD, CD
kombinace s opakováním	A, B, C, D $k = 2$	AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD
variace	A, B, C, D $k = 2$	AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC
variace s opakováním	A, B, C $k = 2$	AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC

# Kombinace, permutace, variace – počty prvků

- Počet všech permutací  $n$  prvků je ...
- Počet všech  $k$  prvkových kombinací z  $n$  prvků je ...
- Počet všech  $k$  prvkových kombinací s opakováním z  $n$  prvků je ...
- Počet všech  $k$  prvkových variací z  $n$  prvků je ...
- Počet všech  $k$  prvkových variací s opakováním z  $n$  prvků je ...

# Kombinace, permutace, variace – počty prvků

- Počet všech permutací  $n$  prvků je  $n!$ .
- Počet všech  $k$  prvkových kombinací z  $n$  prvků je 
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$
- Počet všech  $k$  prvkových kombinací s opakováním z  $n$  prvků je  $\binom{n+k-1}{k}.$
- Počet všech  $k$  prvkových variací z  $n$  prvků je  $\frac{n!}{(n-k)!}.$
- Počet všech  $k$  prvkových variací s opakováním z  $n$  prvků je  $n^k.$



# Úkol: generování kombinací, permutací, variací

- Vstup: množina (seznam) a případně  $k$
- Výstup: (uspořádaný) výpis všech permutací/kombinací/variací (s opakováním)
- vede na přirozené využití rekurze
- jednotlivé varianty jsou podobné

# Umocňování

$$x^y$$

- $x, y$  – kladná čísla (ne nutně celá)
- přibližná hodnota, jen pomocí základních aritmetických operací
- např.  $3.45^{1.2}$

# Efektivní umocňování

$$a^n \bmod k$$

- $a, n, k$  – přirozená čísla
- jak vypočítat efektivně? (lépe než lineárně vzhledem k  $n$ )
- aplikace např. v kryptologii

# Výpočet $\pi$

- $\pi = 3,141592653589793 \dots$
- iracionální číslo
- známé s přesností na miliardy cifer
- jak se určuje hodnota  $\pi$ ?
- (zmíníme jen velmi naivní metody)

# Výpočet $\pi$ – řady

- Gregoryho-Leibnizova řada (součet je  $\pi$ ):

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots$$

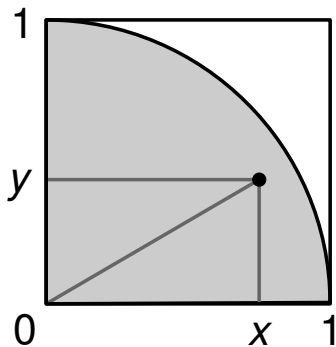
- Archimedova metoda (dvě posloupnosti  $a_n, b_n$  společně konvergující k  $\pi$ ):

$$a_0 = 2\sqrt{3}; b_0 = 3$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

# Výpočet $\pi$ – Monte Carlo



- obsah čtvrtedisku:  $\pi/4$
- obsah čtverce: 1

# Úkol: Výpočet $\pi$

- implementujte uvedené metody
- (najděte další metody a implementujte je)
- experimentálně vyhodnoťte jednotlivé metody – jaké přesnosti jsou schopny dosáhnout během 1 vteřiny?

# Umocňování: rady

$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$$

Taylorova řada:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$



# Výpočet odmocniny

- vstup: číslo  $x$
- výstup: přibližná hodnota  $\sqrt{x}$

# Výpočet odmocniny

- vstup: číslo  $x$
- výstup: přibližná hodnota  $\sqrt{x}$

Základní metoda: binární půlení (rozhodně ne nejvíce efektivní)

# Výpočet odmocniny: binární půlení

spodní odhad    střed    horní odhad

