

# Lineární algebra, transformace v rovině, fraktály

Radek Pelánek

IV122, jaro 2013

# Lineární algebra – pojmy

- skalár, vektor, matice
- sčítání, násobení, transpozice, inverze
- diagonální matice

# Lineární a afinní transformace

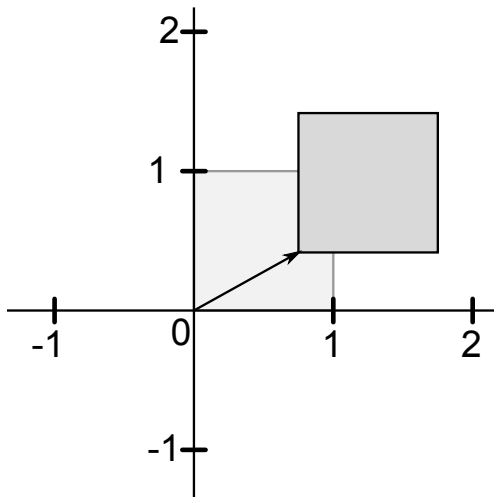
- lineární transformace:
  - $f(a + b) = f(a) + f(b)$
  - $f(ka) = kf(a)$
- afinní transformace: lineární transformace + posun

# Lineární a afiní transformace v rovině

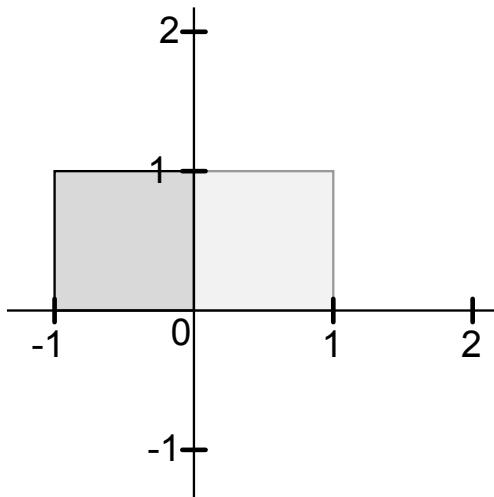
- posunutí
- překlopení
- rotace
- změna velikosti

Jak zapsat pomocí vektorů a matic?

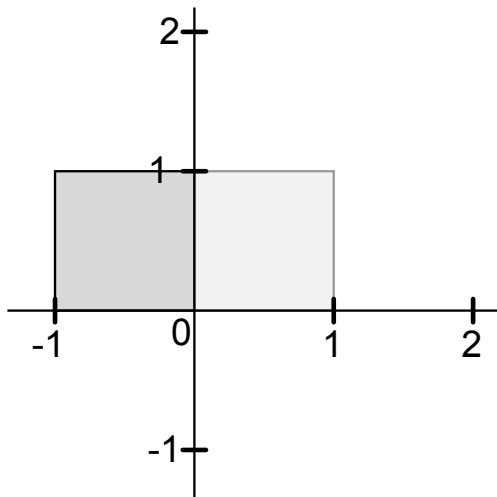
# Posunutí (translation)



# Překlopení (reflexion)

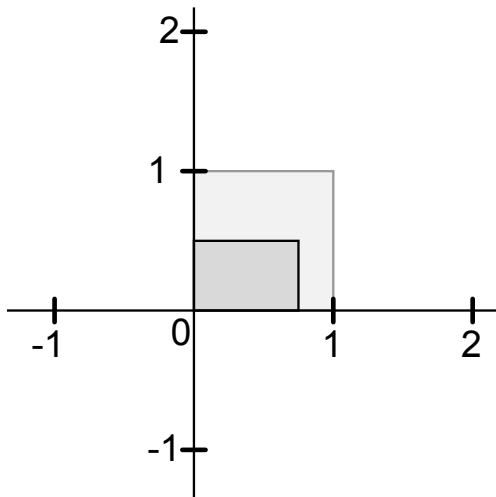


# Překlopení (reflexion)



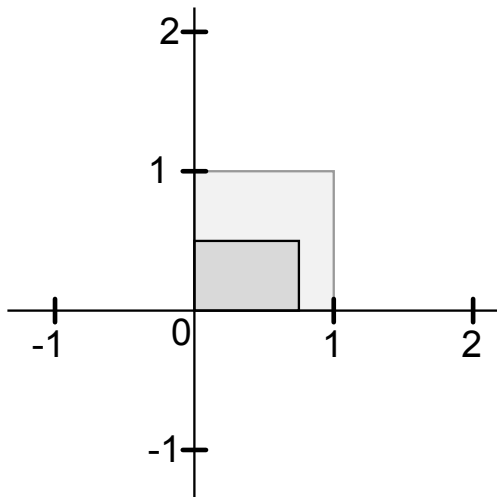
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Změna velikosti (scaling)



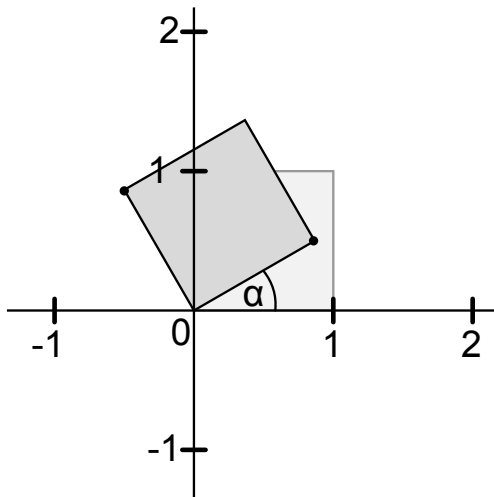


# Změna velikosti (scaling)

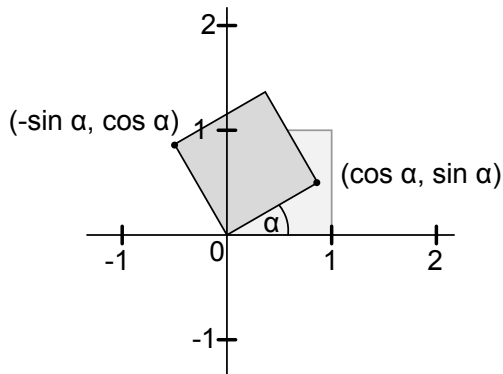


$$\begin{pmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{pmatrix}$$

# Rotace (rotation)

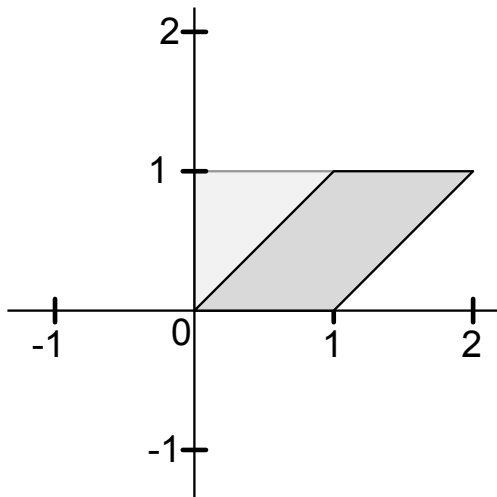


# Rotace (rotation)



$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

# Shear



$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Tutor – úloha Transformace

- `tutor.fi.muni.cz`
- úloha Transformace
- úlohy obsahující v názvu „matice“

# Homogenní souřadnice

- reprezentace afinních transformací pomocí matice  $3 \times 3$
- bod  $(x, y)$  reprezentujeme vektorem  $(x, y, 1)$
- skládání transformací = násobení matic

Rotace

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posunutí

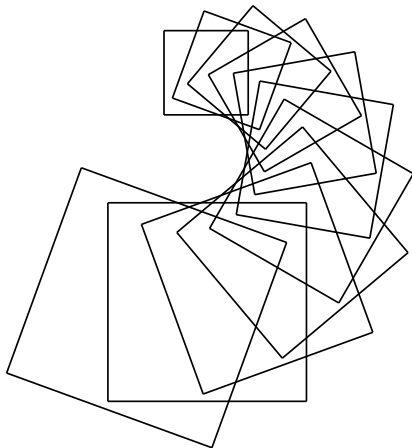
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Úkol: implementace transformací

- transformace reprezentujte maticí  $3 \times 3$
- zvolte vhodnou reprezentaci obrazce v rovině (např. seznam úseček)
- implementujte:
  - generování základních transformací, např. `rotation(angle)`, `scaling(sx, sy)`
  - skládání transformací
  - aplikaci transformace na obrazec
- otestujte

# Ukázka 1

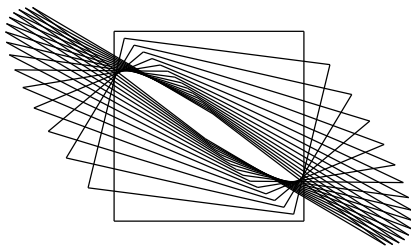
Repeat 10: rotation(20), scaling(1.1, 1.1), translation(5, 10)





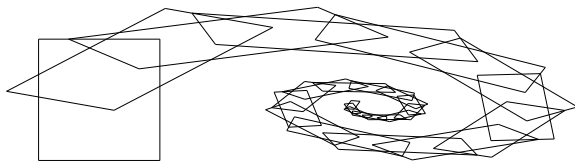
# Ukázka 2

Repeat 15: rotation(10), scaling(1.1, 0.8)



# Ukázka 3

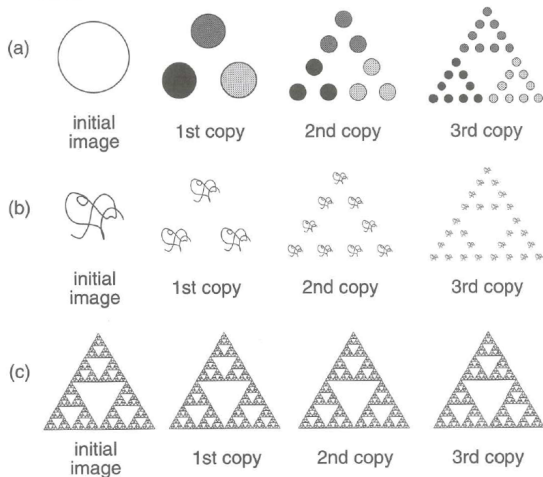
Repeat 25: shear(1.3), rotation(10), scaling(0.9,0.9),  
translation(50, 50)



# Multiple Reduction Copy Machine (MRCM)

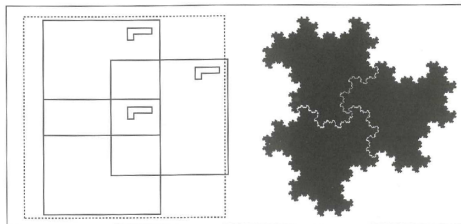
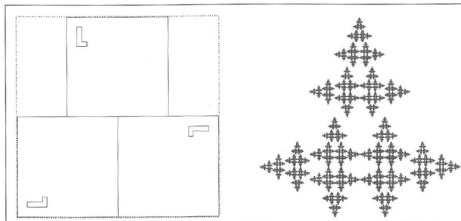
- speciální případ *deterministic iterated function system*
- iterovaně provádíme: obrazec nahradíme několika zmenšenými kopiemi
- iniciální obrázek není důležitý
- „atraktor“ operace (pevný bod, invariant) – typicky fraktál
- definice „zmenšených kopií“ pomocí afinních transformací

# MRCM: princip



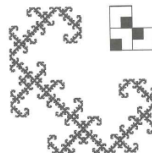
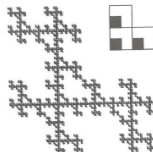
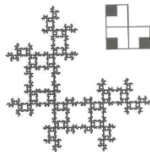
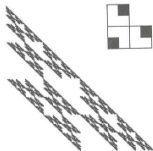
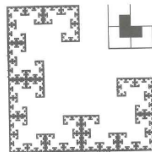
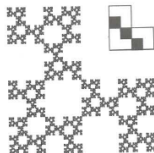
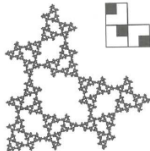
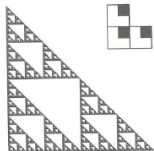
Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

# MRCM: příklady



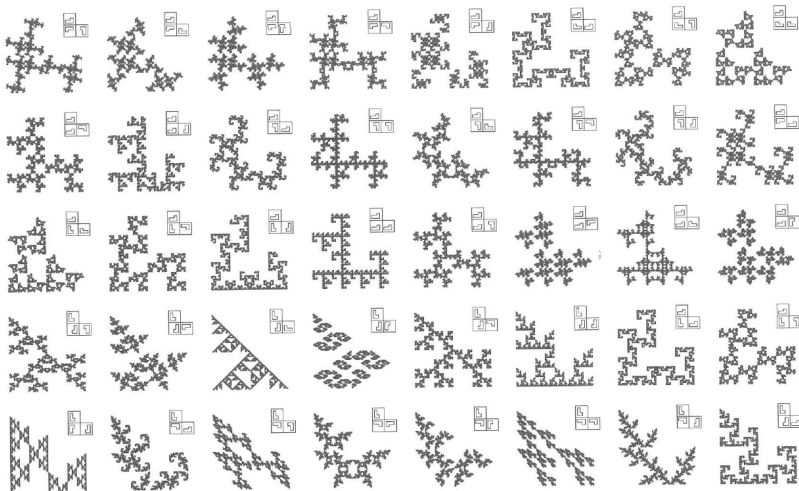
Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

# Sierpińského příbuzní



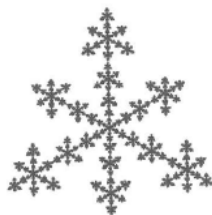
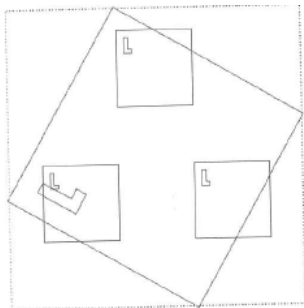
Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

# Sierpińského příbuzní



Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

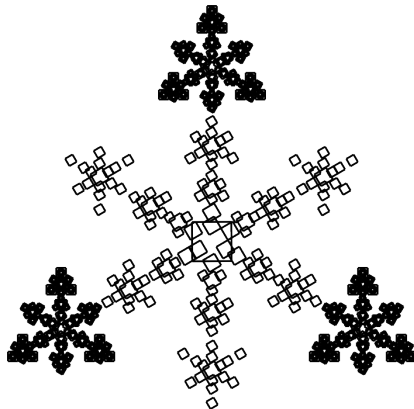
# Hvězda



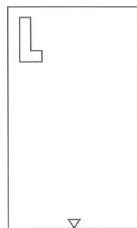
$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
0.255	0	0	0.255	0.3726	0.6714
0.255	0	0	0.255	0.1146	0.2232
0.255	0	0	0.255	0.6306	0.2232
0.370	-0.642	0.642	0.370	0.6356	-0.0061



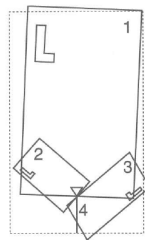
# Hvězda – přímočaré generování



# Kapradí (Barnsley fern)



Initial Image



Stage 1

Peitgen, Jurgens, Saupe. *Chaos and Fractals*

# Kapradí (Barnsley fern)

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
0.849	0.037	-0.037	0.849	0.075	0.183
0.197	-0.226	0.226	0.197	0.4	0.049
-0.15	0.283	0.26	0.237	0.575	0.084
0	0	0	0.16	0.5	0

# Hvězda – přímočaré generování

