1. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 22. 5.

Na řešení je 100 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Nalezněte všechny symetrické matice A rozměru 3×3 s jedničkami na diagonále, pro které platí $A \cdot (1, 1, 1)^T = (1, 2, 3)^T$.

2. (5 bodů) Nechť φ je shodné zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe a to symetrie podle roviny zadané rovnicí $x_1 - x_3 = 0$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

3. (5 bodů) Paní Podlahová, aby si přivydělala k penzi, se rozhodla, že zavaří a prodá ovoce ze své zahrady. Má k dispozici 70 zavařovacích sklenic, 40 kg třešní, 30 kg hrušek a cukr, z něhož vyrobí 9 kg nálevu. Na jednu sklenici zavařených třešní spotřebuje $0,6$ kg třešní a $0,1$ kg nálevu, kdežto na sklenici zavařených hrušek spotřebuje $0,5$ kg hrušek a $0,2$ kg nálevu. Přitom sklenici třešní prodá za 30 Kč a sklenici hrušek za 40 Kč.

Určete kolik má čeho paní Podlahová vyrobit, pokud chce utržit co nejvíce peněz.

4. (5 bodů) Uvažujme jako Leslieho model růstu následující příklad, v němž farmář chová ovce, a to výhradně samice, neboť má speciální vyšlechtěné plemeno, kde se samci rodí naprosto výjimečně, a proto s nimi v našem příkladě vůbec nepočítáme.

Farmář ovce rozděluje do tří věkových kategorií: jehňata (0–1 rok), mladé ovce (1–2 roky) a staré ovce (2–3 roky). Na konci každé sezóny – v říjnu – farmář přepočítává stádo, přičemž pravidelně zjišťuje, že vždy polovina mladých ovcí mu během roku porodila jedno zdravé jehně a druhá polovina mladých ovcí buď neporodila, nebo porodila jehně, které nepřežilo do konce sezóny. Farmář proto přes zimu odešle na jatka tuto druhou polovinu mladých ovcí a dále všechny staré ovce, protože staré ovce se mu dále nevyplatí chovat. První polovinu mladých ovcí si ponechá a ony mu během následujícího léta, nyní již jako staré ovce, porodí po jednom jehněti. Stejně tak si v chovu ponechá všechna jehňata, která se dožila říjnového sčítání a která mu potom během léta, nyní jako mladé ovce, porodí nová jehňata již popsaným způsobem. Takto se stará o své stádo ovcí již mnoho let.

Určete, jak se farmáři daří. Tj. rozhodněte, zda se chov rozšiřuje, je stabilizován na nějakém počtu nebo vymírá. Dále určete, k jakému poměru se blíží počty ovcí v jednotlivých věkových kategoriích.

Výsledky

1. Matici A hledáme ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Podmínka $A \cdot (1,1,1)^T = (1,2,3)^T$ dává následující soustavu rovnic pro neznámé a, b, c.

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= 1 \\ a + 1 + c &= 2 \\ b + c + 1 &= 3 \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$. Proto matice A existuje jediná a to

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Bodování: tvar matice 1b, sestavení soustavy 1b, vyřešení soustavy 2b, výsledek 1b.

2. Normálový vektor roviny je $u_1 = (1, 0, -1)$ a můžeme dále volit dva vektory ze zaměření roviny: např. $u_2 = (1, 0, 1)$ a $u_3 = (0, 1, 0)$. V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahu $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$ dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro návod jak se počítají matice přechodu $(id)_{\epsilon,\alpha}$ a $(id)_{\alpha,\epsilon}$ doporučujeme znovu přečíst vzorové řešení druhé vnitrosemestrální písemky.

Bodování: výběr vhodné báze 1b, matice zobrazení ve vhodné bázi 1b, matice přechodu $2\times$1b, výsledek 1b.

3. Označíme-li x_1 počet sklenic třešní a x_2 počet sklenic hrušek, potom se jedná o úlohu lineárního programování maximalizovat funkci $30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$ při omezeních

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 70\,, \\ 0,6 \cdot x_1 &\leq 40\,, \\ 0,5 \cdot x_2 &\leq 30\,, \\ 0,1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 &\leq 9\,. \end{aligned}$$

Po načrtnutí příslušných přímek, vyznačení polorovin určení směrnic hraničních přímek omezené oblasti zjišťujeme, že maximum se nalézá v průsečíku přímek $x_1 + x_2 = 70$ a $0,1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 = 9$, tj. v bodě $[50, 20]$. Maximální zisk tak lze docílit vyrobením 50 sklenic třešní a 20 sklenic hrušek, a činí 2 300 Kč.

Bodování: sestavení úlohy lineárního programování 2b, geometrické řešení 2b, výsledek 1b. (Uhádnutí výsledku bez zdůvodnění 2b.)

4. Označme počty jehňat, mladých ovcí a starých ovcí v n-té sezóně postupně j_n, m_n a s_n. Pro počty na konci následující sezóny platí vztahy

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= \frac{1}{2}m_n + s_n\,, \\ m_{n+1} &= j_n\,, \\ s_{n+1} &= \frac{1}{2}m_n\,. \end{aligned}$$

Maticově můžeme zapsat předchozí vztahy pomocí Leslieho matice

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

jako $(j_{n+1}, m_{n+1}, s_{n+1})^T = L \cdot (j_n, m_n, s_n)^T$. Charakteristický polynom matice L je $-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$. Dominantní vlastní číslo je $\lambda = 1$ a chov je tudíž stabilizovaný. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$ je $(2, 2, 1)$. Proto se chov stabilizuje ve struktuře: 40% jehňat, 40% mladých ovcí a 20% starých ovcí. Jinými slovy: jehňat bude stejně jako mladých ovcí a starých ovcí bude polovina tohoto počtu.

Poznamenejme, že daná matice L je primitivní (je třeba spočítat L^5) a tedy jakákoli počáteční struktura stáda skutečně konverguje k popsané stabilní struktuře.

Bodování: sestavení matice 2b, vlastní kladné reálné číslo 1b, příslušný vlastní vektor 1b, interpretace 1b.