2. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 29. 5.

SKUPINA — A

Na řešení je 100 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Uvažujme v rovině $\mathbb{R}^2$ přímku p danou obecnou rovnicí $x + 2y = 10$. Napište obecnou rovnici přímky α, která prochází bodem $[1, 2]$ a svírá s přímkou p úhel $60°$.

2. (5 bodů) Určete explicitní formuli pro posloupnost celých čísel, která je dána následující rekurentní formulí a počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n - 2n + 3, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0\,.$$

3. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete vzdálenost mimoběžek $p : [5, 0, 0] + s(2, -1, -1)$ a $q : [-6, 0, 0] + t(4, -1, 1)$. Dále najděte body, v nichž se vzdálenost realizuje, tj. určete krajní body osy mimoběžek p a q.

4. (5 bodů) Čtyři bratři Adam, Boris, Cyril a Petr sedí kolem stolu a hrají hru „Černý Petr háže kostkou“. Předávají si postupně kartičku „Černý Petr“, a to podle toho jaké číslo padne na čtyřstěnné kostce se stěnami označenými čísly 1 – 4, kterou hází Petr. Kartičku si pak v každém kole předají podle následujících pravidel.

- Pokud padne 1, putuje kartička od jejího držitele k bratrovi po pravé ruce.
- Pokud padne 2, putuje kartička od jejího držitele k bratrovi sedícímu naproti.
- Pokud padne 3, putuje kartička od jejího držitele k bratrovi po levé ruce.
- Pokud padne 4, putuje kartička „Černý Petr“ k Petrovi (pokud je držitelem Petr, tak se kartička v tomto kole nepřesouvá).

Takto odehrají dostatečný počet kol. Hra končí v okamžiku, kdy je maminka zavolá k obědu. Určete, jaká je pravděpodobnost, že na konci hry zůstane kartička Petrovi a jaká je pravděpodobnost, že zůstane Adamovi.

Úlohu řešte jako Markovův proces. Poznamenejme, že v každý okamžik je pravděpodobnost padnutí jakéhokoli čísla na čtyřstěnné kostce $\frac{1}{4}$.

2. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 29. 5.

SKUPINA — B

Na řešení je 100 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

51. (5 bodů) Každý ze čtveřice studentů Adam, Boris, Cyril a David napíše nezávisle, tajně a náhodně na lístek číslo od 1 do 19. Jaká je pravděpodobnost, že

i) právě jeden student napsal číslo 7,

ii) aspoň jeden student napsal číslo 7,

iii) součet všech napsaných čísel je 7,

iv) součet čísel napsaných Adamem a Borisem je sudý,

v) součet všech napsaných čísel je 20.

52. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete přímku β, která prochází bodem $M = [1, 1, 2]$ a protíná přímky $p : [0, 2, 2] + s(1, -1, 1)$ a $q : [1, -2, -1] + t(1, 2, 1)$. Určete také průsečík přímek β a p a průsečík přímek β a q.

53. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujeme zobrazení φ kolmé projekce do roviny dané rovnicí $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi. Dále určete $\varphi((1, 1, 1))$.

Pokud neumíte najít $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon}$, pokuste se určit $\varphi((1, 1, 1))$ jiným způsobem.

54. (5 bodů) Starší manželský pár každoročně jezdí na jednu velkou dovolenou, a to buď k moři nebo na hory. Každý rok se rozhodují podle toho, kde byli poslední dva roky, a to částečně náhodně za použití klasické kostky. Rozhodují se podle následujících pravidel.

- Pokud byli poslední dva roky u moře, tak jedou na hory.
- Pokud byli poslední dva roky na horách, tak jedou k moři.
- Pokud byli loni u moře a předloni na horách, pak hází kostkou, a když padne liché číslo, tak jedou k moři, a když sudé číslo, tak jedou na hory.
- Pokud byli loni na horách a předloni u moře, pak hází kostkou, a když padne 1 nebo 2, pak jedou na hory, jinak jedou k moři.

Tímto způsobem se o dovolené rozhodují celý svůj dlouholetý společný život. Určete, jaká je pravděpodobnost, že pojedou letos k moři.

Úlohu řešte jako Markovův proces. Vzhledem k zadání nevystačíte se dvěma stavy, protože musíte rozlišovat, kde byli poslední dva roky. Naproti tomu otázka se týká letošní dovolené, a nikoliv posledních dvou let.

Samozřejmě předpokládáme, že manželé házejí dokonalou kostkou, jejíž stěny jsou označeny čísly $1, 2, 3, 4, 5$ a 6. Tedy předpokládáme, že pravděpodobnost padnutí jakéhokoli čísla na kostce je $\frac{1}{6}$.

Výsledky — skupina A

1. Směrový vektor přímky p je $(2,-1)$. Směrový vektor hledané přímky získáme otočením vektoru $(2,-1)$ o $60°$. Matice otáčení je

$$A = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}.$$

Obraz $(2,-1)^T$ je $A \cdot (2,-1)^T = (1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}-\frac{1}{2})^T$. Normálový vektor přímky α je $(\sqrt{3}-\frac{1}{2}, -1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ a obecná rovnice α je $(\sqrt{3}-\frac{1}{2})x-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})y=-\frac{5}{2}$, kde pravou stranu jsme zjistili dosazením zadaného bodu $[1,2]$.

Úloha má ještě jedno řešení $\overline{\alpha}$: pokud vektor $(2,-1)$ otočíme opačným směrem, tj. o úhel $-60°$, bude obecná rovnice hledané přímky $\overline{\alpha}$ potom $(\sqrt{3}+\frac{1}{2})x+(1-\frac{\sqrt{3}}{2})y=\frac{5}{2}$. Poznamenejme ještě, že bylo možné otáčet rovnou normálový vektor přímky p o $60°$ a dostat normálový vektor přímky α. Další možností bylo hledad vektor $(a,1)$, který svírá s $(2,-1)$ úhel $60°$.

Bodování výše popsaného postupu: idea 1b, matice otáčení 1b, obraz směrového vektoru 1b, obecná rovnice 1b, dosazení zadaného bodu 1b. Jiné postupy bodovány adekvátně.

2. Charakteristický polynom je $\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$. Proto $x_n=a2^n+b3^n+cn+d$, kde $cn+d$ je partikulární řešení, které se určí nejdříve. Dosazením $y_n=cn+d$ do rekurentní formule dostaneme $c(n+2)+d=5(c(n+1)+d)-6(cn+d)-2n+3$, tedy $0=n(-2c-2)+3c-6d+3$. Odtud $c=-1$ a $d=0$. Nyní najdeme a a b porovnáním vyjádření $x_n=a2^n+b3^n-n$ s počátečními podmínkami. Dostaneme $a+b=0$ (pro $n=0$) a $2a+3b-1=0$ (pro $n=1$), tudíž $b=1$ a $a=-1$. Celkem $x_n=3^n-2^n-n$.

Bodování: charakteristický polynom včetně kořenů 1b, předpokládaný tvar pro x_n 1b, nalezení partikulárního řešení 2b, nalezení parametrů a,b 1b.

3. Vektor kolmý ke směrovým vektorům přímek p a q je $(1,3,-1)$. Rovina obsahující přímku p se zaměřením obsahujícím vektor $(1,3,-1)$ je $[5,0,0]+s(2,-1,-1)+a(1,3,-1)$ a hledáme průnik s přímkou $q:[-6,0,0]+t(4,-1,1)$. Příslušná soustava rovnic, kterou dostaneme z rovnosti $[5,0,0]+s(2,-1,-1)+a(1,3,-1)=[-6,0,0]+t(4,-1,1)$, má řešení $s=-1$, $a=-1$ a $t=2$. Proto dostáváme krajní body osy mimoběžek $A=[5,0,0]+(-1)\cdot(2,-1,-1)=[3,1,1]\in p$ a $B=[-6,0,0]+2\cdot(4,-1,1)=[2,-2,2]\in q$. Vektor $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)$ má velikost $\sqrt{11}$, což je vzdálenost daných mimoběžek. (Lze řešit i jinými způsoby.)

Bodování: vzdálenost 3b, krajní body 2b .

4. Petr má významnější roli, nechť je držení kartičky Petrem čtvrtý stav našeho systému. Na pořadí ostatních stavů nezáleží. Pro každého z bratrů je pravděpodobnost, že předají kartičku Petrovi, $\frac{1}{2}$ a pravděpodobnost předání jinému bratrovi je $\frac{1}{4}$, přičemž pravděpodobnost, že si kartičku ponechá, je 0. Pro Petra jsou pravděpodobnosti předání kartičky každému z bratrů $\frac{1}{4}$, včetně pravděpodobnosti, že si kartičku ponechá. Matice Markovova procesu je proto

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je $(1,1,1,2)$. Pronásobením zlomkem $\frac{1}{5}$ dostaneme pravděpodobnostní vektor $(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5})$. Pravděpodobnost držení kartičky Petrem je tedy $\frac{2}{5}$, tj. 40% a Adamem 20%.

Bodování: sestavení matice 2b, vlastní vektor 2b, interpretace 1b.

Výsledky — skupina B

51. Celkový počet možných čtveřic čísel je 19^4. Tímto celkovým počtem jevů budeme obvykle dělit počet příznivých jevů.

i) Můžeme čtyřmi způsoby vybrat studentna, který napsal číslo 7. Zbývající tři studenti „vybírají“ již jen z osmnácti čísel. Proto máme $4 \cdot 18^3$ příznivých jevů. Pravděpodobnost je $\frac{4 \cdot 18^3}{19^4}$.

ii) Spočítáme pravděpodobnost opačného jevu, tj. jevu, že nikdo nenapíše číslo 7. Máme 18^4 příznivých jevů a pravděpodobnost opačného jevu je $(\frac{18}{19})^4$. Hledaná pravděpodobnost je $1 - (\frac{18}{19})^4$.

iii) Rozlišíme možnosti, jak může vzniknout součet 7. Buď součtem čísel $1, 1, 1, 4$ nebo $1, 1, 2, 3$ nebo $1, 2, 2, 2$. V každém ze tří případů určíme, kolika způsoby mohou studenti takovou neuspořádanou čtveřici napsat. Uspořádané čtveřice sestavené z tří jedniček a jedné čtyřky jsou 4. Uspořádaných čtveřic sestavených z čísel 1,1,2 a 3 je dvanáct, protože čtyřmi způsoby vybereme studenta, co napíše 3, a následně třemi způsoby vybereme ze zbývajících studentů toho, co napíše číslo 2. Konečně máme 4 možnosti pro čtveřici 1,2,2,2. Celkem máme $4 + 12 + 4$ příznivých jevů. Pravděpodobnost je $\frac{20}{19^4}$.

iv) Sudý součet může vzniknout ze dvou sudých čísel nebo ze dvou lichých čísel. V prvním případě máme $9 \cdot 9$ možností a v druhém případě $10 \cdot 10$ možností. Pravděpodobnost je $\frac{9^2+10^2}{19^2}$. Zde je celkový počet možností 19^2. Jinou možností je započítat, co zapsali zbývající dva studenti, tj. příznivých jevů je $(9^2 + 10^2) \cdot 19^2$ a dělíme opět 19^4.

v) Označme x_1, x_2, x_3 a x_4 jednotlivá čísla napsaná studenty. Hledáme počet řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ v kladných celých číslech. (Zde využíváme, že každé řešení rovnice splňuje podmínku $x_i \leq 19$.) Označíme-li $y_i = x_i - 1$ zajímáme se o počet řešení rovnice $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ v přirozených číslech (y_i může být nezáporné, ovšem x_i musí být kladné). Nyní se jedná o kombinace s opakováním, kdy vybíráme celkem 16 „jedniček“ pro jednotlivé y_i. Máme tedy $\binom{19}{3}$ příznivých jevů. Pravděpodobnost je $\binom{19}{3}/19^4$. *Poznamenejme, že stejným způsobem bylo možné počítat příklad iii), kde bychom dostali* $\binom{7-4+3}{3} = \binom{6}{3} = 20$ *příznivých jevů.*

Bodování: pětkrát 1b.

52. Nejdříve určíme rovinu ρ procházející bodem M a obsahující přímku p. (V rovině ρ musí totiž ležet přímka β.) Kromě směrového vektoru přímky p vezmeme další vektor, například spojující bod M a bod $[0, 2, 2]$, tj. $(-1, 1, 0)$. Parametrické vyjádření ρ je tedy $[1, 1, 2] + a(-1, 1, 0) + s(1, -1, 1)$. Hledáme průsečík s přímkou q. Příslušná soustava rovnic, kterou dostaneme z rovnosti $[1, 1, 2] + a(-1, 1, 0) + s(1, -1, 1) = [1, -2, -1] + t(1, 2, 1)$, má řešení $s = -2$, $a = -3$ a $t = 1$. Průsečík ρ a q, a tedy zároveň průsečík β a q je bod $X = [1, -2, -1] + 1 \cdot (1, 2, 1) = [2, 0, 0]$. Přímka β má proto směrový vektor $\overrightarrow{MX} = X - M = (1, -1, -2)$ a β má parametrický popis $[1, 1, 2] + x(1, -1, -2)$. Zbývá určit průsečík β a p. Tzn. řešíme rovnici $[1, 1, 2] + x(1, -1, -2) = [0, 2, 2] + s(1, -1, 1)$. Řešení $x = -\frac{1}{3}$, $s = \frac{2}{3}$ nám dává průsečík $[1, 1, 2] + (-\frac{1}{3}) \cdot (1, -1, -2) = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$.

Bodování: přímka β 3b, průsečíky 2b.

53.

Normálový vektor roviny je $u_1 = (1, 1, -1)$ a můžeme dále volit dva vektory ze zaměření roviny: např. $u_2 = (1, 0, 1)$ a $u_3 = (0, 1, 1)$. V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pomocí vztahu $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$ dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro návod, jak se počítají matice přechodu $(id)_{\epsilon,\alpha}$ a $(id)_{\alpha,\epsilon}$, doporučujeme znovu přečíst vzorové řešení druhé vnitrosemestrální písemky. Konečně $\varphi((1,1,1))^T = (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} \cdot (1,1,1)^T = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})^T$.

Bodování: výběr vhodné báze 1b, matice zobrazení ve vhodné bázi 1b, matice přechodu 1b, výsledek 1b, obraz vektoru $(1,1,1)$ *1b.*

54. Označme čtyři stavy postupně MM, MH, HM, HH, kde první písmeno značí, kde byli na dovolené loni, a druhé, kam jedou letos. Sledujme pravděpodobnosti změny stavu následující rok. Ze stavu MM, který značí, že byli dvakrát u moře, musí jet na hory, tj. s pravděpodobností 1 se přesouvá systém do stavu MH. Ve stavu MH házejí kostkou a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ jedou na hory (nový stav HH) a s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ jedou k moři (nový stav HM). Podobně ze stavu HM s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ jde systém do stavu MM resp. MH. Konečně ze stavu HH s pravděpodobností 1 do stavu HM. Matice Markovova procesu je proto

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je $(3,6,6,2)$. Pronásobením zlomkem $\frac{1}{17}$ dostaneme pravděpodobnostní vektor $(\frac{3}{17}, \frac{6}{17}, \frac{6}{17}, \frac{2}{17})$. Pravděpodobnost stavu MM je $\frac{3}{17}$, a stavu HM je $\frac{6}{17}$. Pravděpodobnost, že pojedou k moři, je proto $\frac{3}{17} + \frac{6}{17} = \frac{9}{17}$.

Bodování: sestavení matice 2b, vlastní vektor 2b, interpretace 1b.