3. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 11. 6.

SKUPINA — A

Na řešení je 150 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujeme pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2\dots A_{12}$, který je vepsán do kružnice s poloměrem 2, se středem $S = [0,0]$ v počátku a vrcholem $A_1 = [2,0]$. Přitom vrcholy dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$ jsou číslovány v kladném směru, tj. vrchol A_2 má obě souřadnice kladné.

i) Určete souřadnice vrcholu A_2.

ii) Určete obsah dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$.

iii) Určete obsah trojúhelníku $A_2A_5A_8$.

iv) Určete velikost úhlu, který svírají úhlopříčky A_2A_5 a A_2A_8.

v) Určete průsečík přímek A_2A_9 a A_1A_7.

2. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dán čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [0,1,0]$, $B = [1,0,1]$, $C = [-1,1,1]$ a $D = [3,2,1]$. Buď P pata výšky spuštěná z vrchlu D do roviny stěny ABC. Určete souřadnice bodu P a velikost výšky DP.

3. (5 bodů) Uvažujme následující příklad jako Markovův proces.

Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s jistou pravděpodobností jej zapomene tam, odkud zrovna odchází. Ráno odchází z domova do práce, a protože bývá po ránu v kondici, pravděpodobnost, že deštník zapomene doma, je pouze 1/3. Z práce chodí odpoledne do restaurace a pravděpodobnost, že deštník zapomene v práci, je 1/2. V restauraci si dá pozdní oběd a jde domů, přičemž pravděpodobnost, že zapomene deštník v restauraci, je rovna 2/3. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den (pokud nezapomene) vzít.

Napište matici tohoto Markovova procesu. (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den – od půlnoci do půlnoci.) Jaká je pravděpodobnost, že se po mnoha dnech bude deštník nalézat o půlnoci doma?

4. (5 bodů) Ve standardní bázi ϵ je dána následující matice lineárního zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe.

$$A = (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

i) Ukažte, že charakteristický polynom zadané matice A je $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$.

ii) Určete vlastní čísla a vektory matice A.

iii) Určete, o jaké zobrazení φ se jedná.

V části iii) očekáváme odpověď tvaru: je to kolmá projekce do roviny (resp. symetrie podle roviny, symetrie podle přímky, otáčení podél osy apod.). Vždy musí být také příslušná rovina nebo přímka jednoznačně popsána.

3. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 11. 6.

SKUPINA — B

Na řešení je 150 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

5. (5 bodů) V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujeme pravidelný osmiúhelník $B_1B_2\ldots B_8$, který je vepsán do kružnice s poloměrem 2, se středem $S = [0, 0]$ v počátku a vrcholem $B_1 = [2, 0]$. Přitom vrcholy osmiúhelníku $B_1B_2\ldots B_8$ jsou číslovány v kladném směru, tj. vrchol B_2 má obě souřadnice kladné.

i) Určete souřadnice vrcholu B_2.

ii) Určete obsah osmiúhelníku $B_1B_2\ldots B_8$.

iii) Určete obsah trojúhelníku $B_2B_5B_7$.

iv) Určete velikost úhlu, který svírají úhlopříčky B_2B_5 a B_2B_7.

v) Určete průsečík přímek B_2B_7 a B_1B_5.

6. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dán čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [-1, 0, 1]$, $B = [1, 2, -1]$, $C = [-3, 2, 1]$ a $D = [5, 2, 3]$. Buď P pata výšky spuštěná z vrchlu D do roviny stěny ABC. Určete souřadnice bodu P a velikost výšky DP.

7. (5 bodů) Uvažujme následující příklad jako Markovův proces.

Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s jistou pravděpodobností jej zapomene tam, odkud zrovna odchází. Ráno odchází z domova do práce, a protože bývá po ránu rozespalý, pravděpodobnost, že deštník zapomene doma, je rovna 2/3. Z práce chodí odpoledne do restaurace a pravděpodobnost, že deštník zapomene v práci, je 1/2. V restauraci si dá pozdní oběd a jde domů, přičemž pravděpodobnost, že zapomene deštník v restauraci, je pouze 1/3. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den (pokud nezapomene) vzít.

Napište matici tohoto Markovova procesu. (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den – od půlnoci do půlnoci.) Jaká je pravděpodobnost, že se po mnoha dnech bude deštník nalézat o půlnoci doma?

8. (5 bodů) Ve standardní bázi ϵ je dána následující matice lineárního zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe.

$$B = (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

i) Ukažte, že charakteristický polynom zadané matice B je $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$.

ii) Určete vlastní čísla a vektory matice B.

iii) Určete, o jaké zobrazení φ se jedná.

V části iii) očekáváme odpověď tvaru: je to kolmá projekce do roviny (resp. symetrie podle roviny, symetrie podle přímky, otáčení podél osy apod.). Vždy musí být také příslušná rovina nebo přímka jednoznačně popsána.

Výsledky — skupina A

1. i) Označíme-li S střed dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$, pak velikost $\measuredangle A_1SA_2$ je dvanáctina velikosti plného úhlu $360°$, tj. $30°$. Proto vektor $\overrightarrow{SA_2}$ získáme otočením vektoru $\overrightarrow{SA_1}$ o tento úhel. Matice otáčení je

$$R = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}.$$

Obraz $(2,0)^T$ je $R\cdot(2,0)^T = (\sqrt{3},1)^T$. (*Jiný postup: stačí spustit kolmici z bodu A_2 na základnu SA_1 a určit potřebné délky v příslušném pravoúhlém trojúhelníku s úhlem u vrcholu S velikosti* $30°$.) Tedy $A_2 = [\sqrt{3},1]$.

ii) Obsah trojúhelníku A_1SA_2 je 1, neboť má základnu 2 a výšku 1. (*Jiný postup: lze použít determinant matice s řádky $\overrightarrow{SA_1} = (2,0)$ a $\overrightarrow{SA_2} = (\sqrt{3},1)$. Obsah trojúhelníku A_1SA_2 je pak jeho polovina.*) Obsah dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$ je 12, protože je sjednocením dvanácti shodných trojúhelníků o velikosti 1.

iii) Již víme $A_2 = [\sqrt{3},1]$. Podobně $A_5 = [-1,\sqrt{3}]$ a $A_8 = [-\sqrt{3},-1]$. Obsah tak můžeme určit jako polovinu determinantu matice s řádky $\overrightarrow{A_2A_5} = (-1-\sqrt{3},\sqrt{3}-1)$ a $\overrightarrow{A_2A_8} = (-2\sqrt{3},-2)$. Dostáváme $\frac{1}{2}|2+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}| = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$. (*Jiný způsob: povšimneme si, že A_5 je obrazem bodu A_2 při otáčení o úhel $90°$ kolem počátku S. Stejně tak je A_8 obrazem bodu A_5, dále A_{11} je obrazem bodu A_8 a konečně A_2 je obrazem bodu A_{11} ve stejném otáčení. Tedy $A_2A_5A_8A_{11}$ je čtverec s úhlopříčkou délky 4. Strana tohoto čtverce má velikost $2\sqrt{2}$ a obsah čtverce je 8. Trojúhelník $A_2A_5A_8$ je polovinou čtverce $A_2A_5A_8A_{11}$, a má tedy obsah 4.*)

iv) Protože víme, že $u = \overrightarrow{A_2A_5} = (-1-\sqrt{3},\sqrt{3}-1)$ a $v = \overrightarrow{A_2A_8} = (-2\sqrt{3},-2)$, lze spočítat odchylku α vektorů u a v pomocí skalárního součinu:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{8}{\sqrt{8}\cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Proto velikost $\measuredangle A_5A_2A_8$ je $45°$. (*Jiný postup: z druhého zdůvodnění v bodu iii) můžeme vidět, že trouhelník $A_2A_5A_8$ je pravoúhlý a rovnoramenný. Odtud snadno* $|\measuredangle A_5A_2A_8| = 45°$.)

v) Protože $A_2 = [\sqrt{3},1]$ a $A_9 = [-1,-\sqrt{3}]$, je vektor $\overrightarrow{A_2A_9} = (-1-\sqrt{3},-\sqrt{3}-1)$ násobkem vektoru $(1,1)$. Tedy přímka p procházející body A_2 a A_9 má parametrický popis $[\sqrt{3},1]+t\cdot(1,1)$. Nás zajímá její průsečík s osou x, tj. hledáme takové t, aby druhá souřadnice byla rovna 0. Tedy $t=-1$ a dostáváme průsečík přímky p a osy x o souřadnicích $[\sqrt{3}-1,0]$.

Bodování: pětkrát 1b.

2. Komentář: viz skupina B. Výsledek $P = [2,0,0]$ a velikost výšky je $\sqrt{6}$.

Bodování: bod P 3b, velikost výšky 2b .

3. Deštník se o půlnoci nalézá na jednom ze tří míst, a to doma, v práci nebo v restauraci. Máme tedy tři stavy našeho systému a musíme zjistit, jaké jsou pravděpodobnosti změn stavů za jednu časovou jednotku (jeden den). Matice Markovova procesu je tedy rozměru 3×3, kde první řádek i sloupec je vyhrazen pro stav „deštník doma“, druhý řádek i sloupec je pro stav „deštník v práci“ a třetí pro stav „deštník v restauraci“.

Začněme od konce a určeme, jaká je pravděpodobnost p_{13}, tedy pravděpodobnost, že se deštník přemístí z restaurace domů. To je přímo v zadání: $p_{13} = \frac{1}{3}$. Podobně $p_{33} = \frac{2}{3}$. Dále $p_{23} = 0$, protože pokud byl deštník o půlnoci v restauraci, nemůže být o následující půlnoci v práci. Máme tedy určen třetí sloupec matice.

Hodnota p_{12} je pravděpodobnost, že se deštník přemístí z práce domů. Musí tedy počkat v práci na profesora, potom musí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ cestovat do restaurace a odtud musí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ cestovat s profesorem domů. Tedy $p_{12} = \frac{1}{6}$. Zřejmě $p_{22} = \frac{1}{2}$ a snadno nahlédneme, že $p_{23} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Podobně určíme $p_{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ a $p_{31} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Trochu opatrněji musíme určit p_{11}, protože máme dvě možnosti, jak se může deštník během jednoho dne dostat ze stavu „doma" do stavu „doma". Buď deštník zůstane hned ráno doma, nebo ho profesor zanese do práce i do restaurace a pak vrátí domů. Proto $p_{11} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$. Celkem dostáváme

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že se jedná skutečně o stochastickou matici (tj. součet čísel v jednotlivých sloupcích je 1) a má tedy vlastní číslo 1. Navíc je M i primitivní, protože M^2 je zřejmě pozitivní matice.

(*Matici M je také možné zkonstruovat jinak. Určíme tři pomocné matice, které popisují pravděpodobnosti změn stavů jednotlivých tří cest pana profesora: M_1 bude popisovat cestu z domu do práce, M_2 cestu z práce do restaurace a M_3 cestu z restaurace domů.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Potom již snadno dostaneme $M = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$.)

Nyní můžeme určit vlastní vektor, který je řešením homogenní soustavy dané maticí

$$M - E = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vyřešením soustavy získáme vlastní vektor $(3, 2, 4)$, který vynásobíme číslem $\frac{1}{9}$, abychom dostali pravděpodobnostní vektor $(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9})$. Pravděpodobnost, že se po mnoha dnech bude deštník nalézat o půlnoci doma, je tedy $\frac{1}{3}$.

Bodování: matice 3b (z toho 1b pokud uvedená matice je špatně, ale je stochastická správného rozměru 3×3), vlastní vektor 1b, interpretace 1b.

4. Charakteristický polynom lze například spočítat metodou popsanou ve skupině B. V matici $A - \lambda E$ přičteme první řádek k třetímu a dvojnásobek prvního řádku ke druhému. Pak půjde z druhého a třetího řádku vytknout $(1 - \lambda)$ a determinant snadno dopočítat. Vlastní čísla jsou tedy 1 a -1 a k oběma je třeba spočítat vlastní vektory. Zkusme nejdříve $\lambda = 1$, tj. řešíme homogenní soustavu s následující maticí, kterou ihned násobíme 3 a eliminujeme.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice má hodnost 1 a soustava má řešení dimenze 2 a jsou to vektory kolmé k vektoru $(1, -2, 1)$. Podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 jsou tedy lineární kombinace vektorů $(1, 1, 1)$ a $(1, 0, -1)$. Nyní není třeba nic dál počítat. Nutně musí vyjít vektor $(1, -2, 1)$ jako vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu -1. Nicméně lze to spočítat i řešením příslušné soustavy. Podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 jsou tedy všechny násobky vektoru $(1, -2, 1)$.

Zobrazení φ je souměrností podle roviny kolmé k vektoru $(1, -2, 1)$, tj. roviny dané rovnicí $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Bodování: charakteristický polynom 1b, výpočet vlastních vektorů 2b, typ zobrazení 1b, popis roviny 1b.

Výsledky — skupina B

5. Analogicky jako skupina A

i) Úhel $\measuredangle B_1SB_2$ má velikost $45°$. Dostaneme $B_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

ii) Obsah trojúhelníku B_1SB_2 je $\sqrt{2}$, neboť má základnu 2 a výšku $\sqrt{2}$. Proto je obsah osmiúhelníku $B_1B_2\dots B_8$ roven $8\sqrt{2}$.

iii) Platí $B_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $B_5 = [-2, 0]$, $B_7 = [0, -2]$. Tedy $\overrightarrow{B_2B_5} = (-2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $\overrightarrow{B_2B_7} = (-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2})$. Obsah trojúhelníku je $\frac{1}{2}|(2+\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}^2| = 2 + 2\sqrt{2}$.

iv) Z předchozího $\langle \overrightarrow{B_2B_5}, \overrightarrow{B_2B_7} \rangle = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$. Dále $\|\overrightarrow{B_2B_5}\|^2 = \|\overrightarrow{B_2B_7}\|^2 = (2+\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 = 8 + 4\sqrt{2} = 4(2+\sqrt{2})$. Proto pro úhel β, který svírají vektory $\overrightarrow{B_2B_5}$ a $\overrightarrow{B_2B_7}$, platí $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a úhel β má velikost $45°$. (*Pro znalce středoškolské matematiky to není překvapení, protože se jedná o obvodový úhel ke středovému úhlu $\measuredangle B_5SB_7$, který má velikost $90°$.*)

v) $[2\sqrt{2} - 2, 0]$.

Bodování: pětkrát 1b.

6. Vektor $\overrightarrow{AP}$ je kolmá projekce vektoru $\overrightarrow{AD} = D - A = (6,2,2)$ do roviny určené body A, B a C. Potřebujeme tudíž určit kolmou projekci vektoru $w = (6,2,2)$ do roviny U dané vektory $u_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,2,-2)$ a $u_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,2,0)$. Jednodušší bude určit projekci vektoru w do ortogonálního doplňku $U^\perp$. Vektor kolmý k vektorům u_1 a u_2 je například vektor $v = (1,1,2)$. Hledáme tedy $P_w = a \cdot v$ tak, aby $w - P_w$ byl v rovině U, tedy kolmý k v. (Tento vektor $w - P_w$ je pak hledanou projekcí do roviny U, tzn. je roven vektoru $\overrightarrow{AP}$. Zároveň $\overrightarrow{PD}$ bude rovno P_w.) Hledáme proto skalár a tak, aby $\langle w - av, v\rangle = 0$. Odtud $\langle w, v\rangle - a \cdot \langle v, v\rangle = 0$ a dostaneme $a = \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \frac{12}{6} = 2$. Proto $P_w = a \cdot v = (2,2,4)$ a $\overrightarrow{AP} = w - P_w = (6,2,2) - (2,2,4) = (4,0,-2)$. Celkem dostáváme $P = A + \overrightarrow{AP} = [-1,0,1] + (4,0,-2) = [3,0,-1]$.

Velikost výšky je velikost vektoru $\overrightarrow{PD} = P_w = (2,2,4)$, což je $\sqrt{2^2+2^2+4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Bodování: bod P 3b, velikost výšky 2b .

7. Postup stejný jako ve skupině A. Matice jsou následující.

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu 1 je $(6,2,1)$. Pravděpodobnost, že se po mnoha dnech bude deštník nalézat o půlnoci doma, je tedy rovna $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Bodování: matice 3b (z toho 1b pokud uvedená matice je špatně, ale je stochastická správného rozměru 3×3), vlastní vektor 1b, interpretace 1b.

8. Charakteristický polynom $|B - \lambda E|$ lze spočítat přímo, nicméně my upřednostníme výpočet pomocí elementárních řádkových úprav. První řádek přičteme k druhému a odečteme od třetího. Dostaneme

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ -1 + \lambda & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Nyní můžeme vytknout $(1-\lambda)$ jak z druhého, tak z třetího řádku. Dostaneme

$$|B-\lambda E| = (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nyní přičteme $(\frac{1}{3})$-násobek třetího řádku k prvnímu a dostaneme matici, kde můžeme použít rozvoj podle třetího sloupce. Dostaneme

$$|B-\lambda E| = (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (-1)^6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (-\lambda).$$

Máme charakteristický polynom $-\lambda \cdot (1-\lambda)^2$ a vlastní číslo 1 (algebraické násobnosti 2) a vlastní číslo 0.

Určeme nyní vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1. Matice $B-\lambda E$ je rovna

$$B-E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

První a třetí řádky jsou totožné, druhý je jejich (-1)-násobek. Hodnost matice je tedy 1. Prostor řešení, a tedy prostor vlastních vektorů V_1 příslušných vlastnímu číslu 1, má dimenzi 2 a jedná se tedy o rovinu vektorů, které zobrazení φ zobrazuje na sebe. Báze prostoru V_1 sestává z jakékoli lineárně nezávislé dvojice vektorů, které řeší homogenní soustavu. Například $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Určeme nyní vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0. Matice $B-\lambda E$ je rovna B. Podle počátečního výpočtu (determinantu $|B|$) umíme matici B upravit (pomocí elementárních řádkových úprav) na matici, kterou snadno převedeme do schodovitého tvaru

$$B \sim \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice má hodnost 2, tudíž prostor vlastních vektorů je jednodimenzionální a jedná se o násobky vektoru $(1,-1,1)$. Protože je to vektor kolmý k podprostoru V_1 a obraz vektoru $(1,-1,1)$ v zobrazení φ je $0 \cdot (1,-1,1) = \overrightarrow{0}$ dostáváme, že φ je zobrazení kolmé projekce do roviny V_1. Obecná rovnice roviny V_1 je $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Bodování: charakteristický polynom 1b, vlastní vektory 2b, interpretace 2b (z toho určení zobrazení φ 1b, rovina 1b).