

1. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 28. 3.

SKUPINA — A

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (4 body) Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , přičemž $A = [2, 3]$, $B = [8, 1]$ a bod C je v prvním kvadrantu (tj. má obě souřadnice kladné).
 - a) Určete souřadnice vrcholu C .
 - b) Určete obsah trojúhelníku ABC .
 - c) Rozhodněte, zda je z bodu $P = [15, -2]$ vidět (přes neprůhledný $\triangle ABC$) vrchol A .

Nápověda: pro výpočet souřadnic vrcholu C (u pravého úhlu) si uvědomte, jaké další vlastnosti má střed přepony rovnoarmenného pravoúhlého trojúhelníku.

2. (4 body) V klobouku jsou 3 bílé, 4 červené a 5 modrých koulí. Postupně vytahujeme náhodně 3 koule. (Do klobouku se vytažené koule nevrací!) Určete pravděpodobnost, že
 - a) všechny vytažené koule jsou stejné barvy;
 - b) aspoň jedna vytažená koule je bílá;
 - c) třetí vytažená koule je modrá, za předpokladu, že první dvě koule byly modré.
3. (2 body) Pan Čech se vrací v noci domů a má vyjít z přízemí do prvního patra své vily třináct schodů. Snaží se jít co nejtišeji, aby nevzbudil děti, a proto dělá kroky jen o jeden nebo o dva schody. Navíc nechce šlápnout na sedmý schod, který vrže. Kolika způsoby může schodiště vyjít?

Doporučení: případnou rekurentní formuli pro pomocnou úlohu použijte pro výpočet potřebných hodnot a neztrácejte čas s řešením či vylepšováním této rekurentní formule.

1. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 28. 3.

SKUPINA — B

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

- (4 body) Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník PQR s přeponou PQ , přičemž $P = [1, 0]$, $Q = [7, 4]$ a bod R je v prvním kvadrantu (tj. má obě souřadnice kladné).
 - Určete souřadnice vrcholu R .
 - Určete obsah trojúhelníku PQR .
 - Rozhodněte, zda je z bodu $A = [24, 0]$ vidět (přes neprůhledný $\triangle PQR$) vrchol R .

Nápověda: pro výpočet souřadnic vrcholu R (u pravého úhlu) si uvědomte, jaké další vlastnosti má střed přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku.

- (4 body) V klobouku jsou 3 bílé, 5 červených a 5 modrých koulí. Postupně vytahujeme náhodně 3 koule. (Do klobouku se vytažené koule nevrací!) Určete pravděpodobnost, že
 - vytažené koule mají různou barvu;
 - aspoň jedna vytažená koule je modrá;
 - třetí vytažená koule je červená, za předpokladu, že první dvě koule byly červené.
- (2 body) Pan Čech se vrací v noci domů a má vyjít schodiště z přízemí do prvního patra své vily, které má třináct schodů. Dělá kroky jen o jeden nebo o dva schody, přičemž chce šlápnout na sedmý schod. Kolika způsoby může schodiště vyjít?

Doporučení: případnou rekurentní formuli pro pomocnou úlohu použijte pro výpočet potřebných hodnot a neztrácejte čas s řešením či vylepšováním této rekurentní formule.

1. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 28. 3.

SKUPINA — X

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

- (4 body) Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník XYZ s přeponou XY , přičemž $X = [1, 4]$, $Y = [5, -2]$ a bod Z je v prvním kvadrantu (tj. má obě souřadnice kladné).
 - Určete souřadnice vrcholu Z .
 - Určete obsah trojúhelníku XYZ .
 - Rozhodněte, zda je z bodu $A = [3, -11]$ vidět (přes neprůhledný $\triangle XYZ$) vrchol Z .

Nápověda: pro výpočet souřadnic vrcholu Z (u pravého úhlu) si uvědomte, jaké další vlastnosti má střed přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku.

- (4 body) V klobouku jsou 3 bílé, 3 červené a 6 modrých koulí. Postupně vytahujeme náhodně 3 koule. (Do klobouku se vytažené koule nevrací!) Určete pravděpodobnost, že
 - všechny vytažené koule jsou stejné barvy;
 - aspoň jedna vytažená koule je modrá;
 - třetí vytažená koule je červená, za předpokladu, že první dvě koule byly bílé.
- (2 body) Chystáme se vyjít schodiště, které má osm schodů, přičemž na posledním schodu se otočíme a schodiště opět sejdeme. Cestou nahoru děláme kroky o jeden nebo o dva schody a stejně tak při cestě dolů. Kolika způsoby můžeme schodiště vyjít?

Doporučení: případnou rekurentní formuli pro pomocnou úlohu použijte pro výpočet potřebných hodnot a neztrácejte čas s řešením či vylepšováním této rekurentní formule.

1. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 28. 3.

SKUPINA — Y

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

- (4 body) Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník KLM s přeponou KL , přičemž $K = [-3, -4]$, $L = [9, 0]$ a bod M je v prvním kvadrantu (tj. má obě souřadnice kladné).
 - Určete souřadnice vrcholu M .
 - Určete obsah trojúhelníku KLM .
 - Rozhodněte, zda bod $P = [-1, -2]$ leží v trojúhelníku KLM .

Nápověda: pro výpočet souřadnic vrcholu M (u pravého úhlu) si uvědomte, jaké další vlastnosti má střed přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku.

- (4 body) V klobouku jsou 4 bílé, 4 červené a 4 modré koule. Postupně vytahujeme náhodně 3 koule. (Do klobouku se vytažené koule nevrací!) Určete pravděpodobnost, že
 - vytažené koule mají různou barvu;
 - aspoň jedna vytažená koule je bílá;
 - třetí vytažená koule je červená, za předpokladu, že první dvě koule byly červené.
- (2 body) Chystáme se vyjít schodiště, které má patnáct schodů, přičemž děláme kroky o jeden nebo o dva schody. Navíc chceme stoupnout na patý a na desatý schod. Kolika způsoby můžeme schodiště vyjít?

Doporučení: případnou rekurentní formuli pro pomocnou úlohu použijte pro výpočet potřebných hodnot a neztrácejte čas s řešením či vylepšováním této rekurentní formule.

Výsledky

Skupina A:

1. a) Máme vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (6, -2)$. Jeho polovina je vektor $(3, -1)$ a tudíž pro střed X strany AB platí $X = A + (3, -1) = [5, 2]$. Střed strany je zároveň patou výšky a středem kružnice opsané, proto vektor \overrightarrow{XC} je kolmý ke straně AB a má stejnou velikost jako vektor \overrightarrow{AX} . Odtud \overrightarrow{XC} je $(1, 3)$ nebo $(-1, -3)$. V druhém případě by bod C neležel v prvním kvadrantu. Proto $C = [5, 2] + (1, 3) = [6, 5]$.

b) Obsah lze spočítat různými způsoby. Například vezmeme stranu AB , která má velikost $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Délka výšky je $|\overrightarrow{XC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Obsah trojúhelníku ABC je tedy $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$.

Jiný způsob: vezmeme $\overrightarrow{AB} = (6, -2)$ a $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$ a určíme determinant matice tvořené touto dvojicí vektorů: $12 + 8 = 20$. To je obsah rovnoběžníku a obsah $\triangle ABC$ je polovina, tj. 10.

c) Ano. Uvažme vektor $\overrightarrow{AB} = (6, -2)$ a podívejme se, na které straně přímky určené tímto vektorem se nalézá bod P . Vezměme $\overrightarrow{AP} = (13, -5)$ a určíme determinant, kde první řádek matice je \overrightarrow{AB} a druhý \overrightarrow{AP} . Tento determinant je roven $-30 + 26 = -4 < 0$. Tudíž P je napravo od \overrightarrow{AB} . Protože bod C je nalevo od \overrightarrow{AB} , je vrchol A viditelný z bodu P .

2. a) Počet všech možných vytažení koulí je $\binom{12}{3} = 220$. Počet příznivých možností je: všechny bílé – 1 možnost; všechny červené $\binom{4}{3} = 4$; všechny modré $\binom{5}{3} = 10$, tj. celkem $1 + 4 + 10 = 15$ možností. A hledaná pravděpodobnost je $\frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

b) Spočítáme pravděpodobnost opačného jevu C , tj. že nebude vytažena žádná bílá koule. $P(C) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{21}{55}$. Proto pravděpodobnost vytažení aspoň jedné bílé koule je $1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$.

c) Pokud jsme vytáhli dvě modré, pak klobouk obsahuje 3 bílé, 4 červené a 3 modré. Tj. celkem 10 koulí a pravděpodobnost vytažení modré koule je $\frac{3}{10}$.

3. Nejdříve připomeňme úlohu o vyjítí n schodů bez omezení. Označíme-li f_n počet vyjítí n schodů, pak platí rekurentní vztah $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ a základní podmínky $f_1 = 1, f_2 = 2$. Odtud dostaneme další hodnoty $f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8, f_6 = 13, f_7 = 21, f_8 = 34$. (Tzv. Fibonacciho posloupnost). V našem případě musí pan Čech šlápnout na šestý schod a následně udělat krok délky 2 a šlápnout na osmý schod. Kombinujeme tedy vyjítí prvních 6 schodů a posledních 5 schodů: Celkem $f_6 \cdot f_5 = 13 \cdot 8 = 104$ způsobů.

Skupina B:

1. a) $R = [2, 5]$, **b)** $S = 13$, **c)** Ne.

2. a) Celkem 13 koulí a tedy $\binom{13}{3} = 13 \cdot 11 \cdot 2 = 286$ možných vytažení. Počet příznivých $3 \cdot 5 \cdot 5$.

Tedy pravděpodobnost $\frac{75}{286}$. **b)** $1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{115}{143}$, **c)** $\frac{3}{11}$.

3. $f_7 \cdot f_6 = 21 \cdot 13 = 273$ způsobů.

Skupina X:

1. a) $Z = [6, 3]$, **b)** $S = 13$, **c)** Ne.

2. a) $\frac{1+1+\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{10}$, **b)** $1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{11}$, **c)** $\frac{3}{10}$.

3. $f_8 \cdot f_8 = 34 \cdot 34$ způsobů.

Skupina Y:

1. a) $M = [1, 4]$, **b)** $S = 40$, **c)** Ano.

2. a) $\frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{\binom{12}{3}} = \frac{16}{55}$, **b)** $1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{41}{55}$, **c)** $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

3. $f_5 \cdot f_5 \cdot f_5 = 8^3 = 512$ způsobů.