2. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 25. 4.

SKUPINA — A

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3 body) Nechť je dána matice (lineárního zobrazení ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ do sebe) A, o niž víme, že má vlastní číslo 2. Určete podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ sestávající z vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: ostatní vlastní čísla a jim příslušné vektory nehledejte.

2. (3 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažme podprostor

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0\}.$$

a) Určete nějakou bázi podprostoru U.

b) Určete nějakou ortogonální bázi podprostoru U.

Připomeňme, že ortogonální báze sestává z navzájem kolmých vektorů. Neztrácejte tedy čas s normováním vektorů a hledáním ortonormální báze.

3. (4 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažme bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ složenou z vektorů $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ a $u_3 = (1, 1, 1)$. Dále buď $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení o němž víme, že $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = u_3$ a $\varphi(u_3) = u_2$.

a) Určete matici přechodu od báze α ke standardní bázi $\epsilon = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

b) Určete matici přechodu od báze ϵ k bázi α.

c) Určete matici zobrazení φ v bázi ϵ.

V části c) můžete začít tím, že určíte matici zobrazení φ v nějakých bázích (například od báze α k bázi α nebo od α k ϵ) a poté využijete matic určených v částech a) a b).

Pokud neumíte matice v a) a b) vypočítat, napište aspoň, jak byste postupovali, kdybyste jednu z nich znali.

2. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 25. 4.

SKUPINA — B

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3 body) Nechť je dána matice (lineárního zobrazení ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ do sebe) A, o niž víme, že má vlastní číslo 3. Určete podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ sestávající z vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: ostatní vlastní čísla a jim příslušné vektory nehledejte.

2. (3 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažme podprostor

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

a) Určete nějakou bázi podprostoru U.

b) Určete nějakou ortogonální bázi podprostoru U.

Připomeňme, že ortogonální báze sestává z navzájem kolmých vektorů. Neztrácejte tedy čas s normováním vektorů a hledáním ortonormální báze.

3. (4 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažme bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ složenou z vektorů $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ a $u_3 = (1,1,0)$. Dále buď $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení o němž víme, že $\varphi(u_1) = u_2$, $\varphi(u_2) = u_3$ a $\varphi(u_3) = u_1$.

a) Určete matici přechodu od báze α ke standardní bázi $\epsilon = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

b) Určete matici přechodu od báze ϵ k bázi α.

c) Určete matici zobrazení φ v bázi ϵ.

V části c) můžete začít tím, že určíte matici zobrazení φ v nějakých bázích (například od báze α k bázi α nebo od α k ϵ) a poté využijete matic určených v částech a) a b).

Pokud neumíte matice v a) a b) vypočítat, napište aspoň, jak byste postupovali, kdybyste jednu z nich znali.

2. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 25. 4.

SKUPINA — X

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3 body) Nechť je dána matice (lineárního zobrazení ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ do sebe) A, o niž víme, že má vlastní číslo 3. Určete podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ sestávající z vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: ostatní vlastní čísla a jim příslušné vektory nehledejte.

2. (3 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažme podprostor

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 3x_4 = 0\}\,.$$

a) Určete nějakou bázi podprostoru U.

b) Určete nějakou ortogonální bázi podprostoru U.

Připomeňme, že ortogonální báze sestává z navzájem kolmých vektorů. Neztrácejte tedy čas s normováním vektorů a hledáním ortonormální báze.

3. (4 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažme bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ složenou z vektorů $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ a $u_3 = (1, 0, 1)$. Dále buď $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení o němž víme, že $\varphi(u_1) = u_3$, $\varphi(u_2) = u_1$ a $\varphi(u_3) = u_3$.

a) Určete matici přechodu od báze α ke standardní bázi $\epsilon = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

b) Určete matici přechodu od báze ϵ k bázi α.

c) Určete matici zobrazení φ v bázi ϵ.

V části c) můžete začít tím, že určíte matici zobrazení φ v nějakých bázích (například od báze α k bázi α nebo od α k ϵ) a poté využijete matic určených v částech a) a b).

Pokud neumíte matice v a) a b) vypočítat, napište aspoň, jak byste postupovali, kdybyste jednu z nich znali.

2. vnitrosemestrální písemka — MB101 — jaro 2013 — 25. 4.

SKUPINA — Y

Na řešení je 45 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3 body) Nechť je dána matice (lineárního zobrazení ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ do sebe) A, o niž víme, že má vlastní číslo 2. Určete podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ sestávající z vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Poznámka: ostatní vlastní čísla a jim příslušné vektory nehledejte.

2. (3 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažme podprostor

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}.$$

a) Určete nějakou bázi podprostoru U.

b) Určete nějakou ortogonální bázi podprostoru U.

Připomeňme, že ortogonální báze sestává z navzájem kolmých vektorů. Neztrácejte tedy čas s normováním vektorů a hledáním ortonormální báze.

3. (4 body) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažme bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ složenou z vektorů $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ a $u_3 = (1, 1, 1)$. Dále buď $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení o němž víme, že $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = u_3$ a $\varphi(u_3) = u_1$.

a) Určete matici přechodu od báze α ke standardní bázi $\epsilon = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

b) Určete matici přechodu od báze ϵ k bázi α.

c) Určete matici zobrazení φ v bázi ϵ.

V části c) můžete začít tím, že určíte matici zobrazení φ v nějakých bázích (například od báze α k bázi α nebo od α k ϵ) a poté využijete matic určených v částech a) a b).

Pokud neumíte matice v a) a b) vypočítat, napište aspoň, jak byste postupovali, kdybyste jednu z nich znali.

Výsledky

Skupina A:

1. Odečteme vlastní číslo 2 na diagonále a dostaneme homogenní soustavu:

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Eliminací matice (pokud začneme například přemístěním třetího řádku na první) obdržíme matici ve schodovitém tvaru

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Při zavedení parametrů s a t za x_3 a x_4 dostaneme následující vyjádření podprostoru vlastních vektorů $\{s(0, \frac{2}{3}, 1, 0) + t(1, -\frac{1}{3}, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Tudíž se jedná o dvoudimenzionální podprostor s bází například $((0, \frac{2}{3}, 1, 0), (1, -\frac{1}{3}, 0, 1))$ nebo s bází $((0, 2, 3, 0), (3, -1, 0, 3))$, pokud předchozí bazické vektory pronásobíme vhodným skalárem. Báze není samozřejmě určena jednoznačně, tj. je více možných popisů podprostoru.

2. Zdůrazněme, že výsledek není jednoznačný, tzn. je možné více správných odpovědí!

a) V dané soustavě o jedné rovnici, lze za x_3 a x_4 vzít volné parametry, tj. $x_3 = s$ a $x_4 = t$. Potom $x_2 = -2x_3 - 3x_4 = -2s - 3t$ a za x_1 můžeme vzít další volný parametr $x_1 = r$. Tedy řešení rovnice jsou tvaru $(r, -2s - 3t, s, t) = r(1, 0, 0, 0) + s(0, -2, 1, 0) + t(0, -3, 0, 1)$. Proto za bázi můžeme vzít například $((1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, -3, 0, 1))$.

b) Protože první dva vektory předchozí báze jsou na sebe kolmé, zbývá nahradit třetí vektor vhodným vektorem, který je k prvním dvěma vektorům kolmý. Dle Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu, hledáme vektor $v_3 = (0, -3, 0, 1) + a(1, 0, 0, 0) + b(0, -2, 1, 0)$ kolmý k vektorům $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ a $v_2 = (0, -2, 1, 0)$. Skalární součin v_3 s v_1 dává podmínku $0 = a$. Skalární součin v_3 s v_2 dává $0 = 6 + 5b$, tj. $b = -\frac{6}{5}$. Odtud $v_3 = (0, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1)$. Místo něj lze také vzít jakýkoli násobek, například $-5v_3 = (0, 3, 6, -5)$. Ortogonální báze je proto například $((1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 3, 6, -5))$.
Poznamenejme, že v_3 je dán, až na násobek, tím, že je kolmý k vektorům v_1 a v_2 a také k vektoru $(0, 1, 2, 3)$ a není tedy nezbytně nutné použít Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.

3. a) Matice přechodu od báze α k bázi ϵ se sestaví tak, že vektory z α dáme do sloupců.

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Matice přechodu od báze ϵ k bázi α je inverzní matice k předchozí matici.

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Matice zobrazení φ v bázi α se sestaví tak, že souřadnice obrazů bázových vektorů dáme do sloupců této matice. Tedy $(\varphi(u_1))_\alpha = (u_1)_\alpha = (1, 0, 0)$, $(\varphi(u_2))_\alpha = (u_3)_\alpha = (0, 0, 1)$ a $(\varphi(u_3))_\alpha = (u_2)_\alpha = (0, 1, 0)$. Odtud

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet matice zobrazení φ v bázi ϵ použijeme předchozí výpočty. Platí

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skupina B:

1. $\{s(3,3,-1,0) + t(2,2,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.
2. a) $((0,1,0,0),(2,0,1,0),(-2,0,0,1))$, **b)** $((0,1,0,0),(2,0,1,0),(-2,0,4,5))$.
3.

$$\textbf{a)} \quad (id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)} \quad (id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{c)} \quad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Skupina X:

1. $\{s(3,2,0,0) + t(1,0,2,2) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.
2. a) $((1,1,0,0),(0,0,1,0),(-3,0,0,1))$, **b)** $((1,1,0,0),(0,0,1,0),(-3,3,0,2))$.
3.

$$\textbf{a)} \quad (id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)} \quad (id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{c)} \quad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Skupina Y:

1. $\{s(0,3,2,0) + t(2,1,0,2) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.
2. a) $((1,0,0,0),(0,-3,1,0),(0,1,0,1))$, **b)** $((1,0,0,0),(0,-3,1,0),(0,1,3,10))$.
3.

$$\textbf{a)} \quad (id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)} \quad (id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{c)} \quad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Způsob bodování

1. Sestavení správné homogenní soustavy 1b, eliminace do schodovitého tvaru 1b, správný popis podprostoru (např. nějakou bází nebo pomocí lineárních kombinací) 1b.

2. a) 1b, b) postup (Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces nebo jiný vhodný postup) 1b, ortogonální báze 1b.

3. a) 1b, b) postup (tj. řečeno, že se jedná o inverzní matici k předchozí a postup výpočtu inverzní matice) 0.5b, správný výsledek 0.5b (Prohození matic v a) a b): srážka 0.5b ze 2b.)

c) matice zobrazení v nějakých bázích 1b, vhodná převodní formule pro výpočet matice zobrazení ve standardní bázi 0.5b, správný výsledek 0.5b. (Jiný metody hodnoceny adekvátně.)

Po sečtení zaokrouhleno na celé body nahoru.