Lineární modely - 1. přednáška

Skaláry, Kombinatorika a Diferenční rovnice prvního řádu

Ondřej Klíma

21. 2. 2013

Osnova přednášky

- Skaláry a číselné obory (komplexní čísla)
- Kombinatorika
- Diferenční rovnice prvního řádu

Čísla

Objevovala se čísla vyjadřující počet, vzdálenost, délku, váhu, ... a také potřeba s nimi pracovat: sčítat, násobit, ...

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, operace: $+$, $\cdot$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, operace: $+$, $\cdot$, $-$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, operace: $+$, $\cdot$, $-$, $:$ (částečně)
- $\mathbb{R}$ – reálná čísla (obsah kruhu, uhlopříčka čtverce),
  –„operace“ navíc: příští semestr; částečné odmocňování
- $\mathbb{C}$ – operace navíc: odmocňování

Vlastnosti sčítání

Množina vybavená operací $+$ má často tyto vlastnosti:

- pro všechna a, b, c platí $(a+b)+c = a+(b+c)$
- pro všechna a, b platí $a+b = b+a$
- existuje prvek 0 tak, že pro všechna a je $a+0 = a$
- pro všechna a existuje $(-a)$ tak, že $a+(-a) = 0$

Hovoříme o *komutativních grupách*.

Kontrolní otázka: Co množiny z předchozí strany?

Vlastnosti násobení

Zjednodušeně (tj. nesprávně) zapsáno

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\
a \cdot b &= b \cdot a, \\
1 \cdot a &= a \\
a \cdot a^{-1} &= 1 \ \ (\text{pro } a \neq 0) \\
a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c,
\end{aligned}
$$

Hovoříme o poli (často také o komutativním tělese).

Prvky nějaké množiny s operacemi $+$ a $\cdot$ splňujícími (ne nutně všechny) předchozí vlastnosti budeme nazývat skaláry.

Skalární funkce

Nezkoumáme pouze skaláry, ale také závislosti mezi nimi:

$$y = f(x)\,,$$

kde „závislá“ veličina y je dána pomocí „nezávislé“ veličiny x.

- daň ze mzdy ... $f(x) = 0.15 \cdot x$
- plocha kruhu ... $f(x) = \pi \cdot x^2$
- faktoriál ... $f(0) = 1,\ f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$
- méně explicitní ... $f(x)$ je nejmenší prvočíslo větší než 10^x

Ideální stav: f je dáno vzorcem pomocí známých operací.

Často má f neformální popis a přechod k explicitnímu popisu je právě úkolem.

Je-li hodnotou skalár, hovoříme o skalární funkci.

Skalární funkce – poznámky

Hodnoty skalární funkce mohou být také dány pouze přibližně nebo s jistou pravděpodobností.

- měření ve fyzice (váha objektu x)
- součet na x kostkách

Formálně je funkce tzv. zobrazení z množiny X do množiny Y: pro libovolný prvek $x \in X$ je jednoznačně dán prvek $f(x) \in Y$.

Další příklady zobrazení, které nejsou skalární funkce:

- $Y = \{true, false\}$ ... výroková logika
- X je množina studentů zapsaných v předmětu MB101, f je přiřazení hodnocení, tj. $Y = \{A, B, C, D, E, F, -\}$

Komplexní čísla a jejich vlastnosti

Komplexní rovina.

$$\mathbb{C} = \{a + i\,b,\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Absolutní hodnota = vzdálenost od počátku

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a + i\,b)(a - i\,b)$$

Goniometrický tvar

$$z = |z|\,(\cos\phi + i\,\sin\phi)$$

Moivreova věta

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\phi) + i\,\sin(n\phi))$$

Základní kombinatorické postupy

Základní kombinatorické principy

- princip součtu (rozdílu)
- princip součinu (podílu)
- princip bijekce (kódování)
- princip inkluze a exkluze
- rekurentní metody

Příklad - reprezentace třídy

Příklad

Ze třídy 30 žáků máme vybrat 2 reprezentanty na školní soutěž, přičemž nám nezáleží na jejich pořadí.

Zadání jinak: ze 30 čísel $1, \ldots, 30$ máme vybrat 2 čísla.
Řešení: rozdělme podle menšího čísla (princip součtu).

Kolik je možností, kdy menší reprezentant je 1? 29
Kolik je možností, kdy menší reprezentant je 2? 28

$$\vdots$$

Kolik je možností, kdy menší reprezentant je 29? 1

Celkem: $29 + 28 + 27 + \cdots + 1 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29$.

Jiné řešení: Dejme tomu, že nám na jejich pořadí bude záležet. Pak jich je $30 \cdot 29$ (princip součinu). Teď jsme každou možnost započítali dvakrát, tzn. $2 \cdot x = 30 \cdot 29$. Odtud odpověď $\frac{30 \cdot 29}{2}$.
Pozor výsledek musí být přirozené číslo.

Příklad – fotbalová liga

Příklad (Liga – celkové pořadí)

Kolik je možných pořadí fotbalové ligy (16 družstev).

Řešení – princip součinu $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 16!$

Příklad (Liga – pohárové pozice)

Kolik je možných pořadí na prvních čtyřech místech.

Řešení – princip součinu $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{16!}{12!}$.

Příklad (Liga – pohárové pozice – varianta)

Stejná úloha, jen nám nezáleží na pořadí na prvních 4 místech, ale pouze na tom, která mužstva tam jsou.

Řešení – předchozí $\frac{16!}{12!}$. Protože nám nezáleží na pořadí, každá možnost je počítána vícekrát. Kolikrát? 4!. Tedy $\frac{16!}{12! \cdot 4!}$.

Kontrolní otázka: Kolika způsoby může liga dopadnout, pokud nás zajímá pořadí na prvních 4 místech a dále, která čtyři mužstva sestupují.

Kombinační (binomická) čísla

Příklad (Sportka)

Kolika způsoby lze z množiny $\{1, \ldots, 49\}$ vybrat 6 čísel, přičemž nám nezáleží na jejich pořadí.

$$\frac{49!}{43! \cdot 6!}$$

Příklad (Počet podmnožin)

Je dána množina M o n prvcích a číslo k. Kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny M?

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Pro toto číslo se vyplatí symbol: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Tzv. kombinační číslo, nebo také binomický koeficient.

Pozn.: Předpokládáme $0 \leq k \leq n$. Jinak má smysl položit rovno 0.

Binomická věta

Věta

Pro libovolná $a, b \in \ldots$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)$$

Koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ je roven právě počtu možností, jak vybrat k-tici závorek, kde bereme a.

Proto se hovoří o binomických číslech/ koeficientech.

Kombinační číslo se používá, protože se hovoří o kombinacích.

Permutace, variace, kombinace – pojďme udělat pořádek.

Permutace

Definice

Permutace/pořadí je uspořádaná n-tice (všech) prvků dané n-prvkové množiny.

Věta

Počet všech permutací konečné množiny s n prvky je dán funkcí faktoriál:

$$f(n) = n!$$

Příklad: Liga – celkové pořadí

Variace

Definice

Variace je uspořádaná k-tice prvků z dané n-prvkové množiny.

Hovoříme o *variaci k-tého stupně třídy n*.

Věta

Počet variací k-tého stupně třídy n je

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

kde $0 \leq k \leq n$ *(a nula jinak).*

Příklad: Liga – pohárové pozice; Reprezentace třídy

Kombinace

Definice

Kombinace je neuspořádaná k-tice prvků z dané n-prvkové množiny.

Jinými slovy: kombinace je k-prvková podmnožina.
Hovoříme o *kombinaci k-tého stupně třídy n*.

Věta

Počet kombinací k-tého stupně třídy n je $\binom{n}{k}$ pro všechna $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Příklad: Liga – pohárové pozice – varianta; Sportka

Permutace, variace a kombinace s opakovaním

V předchozích příkladech byla daná množina prvků z které jsme vybírali. Tj. každý prvek má jeden exemplář.
V následujícím se podíváme na úlohy, kde prvky mohou být vybrány opakovaně (máme dostatek exemplářů každého prvku). Např:

Příklad (Přesmyčky)

Kolik je možné sestavit slov z písmen slova ANANAS?

Příklad (Počet k-ciferných čísel)

Kolik je 5-ciferných čísel, které neobsahují cifru 0?

Příklad (Nákup ovoce)

V obchodě chceme nakoupit 10 kusů ovoce ze sortimentu ananas, banán, jablko a pomeranč. Kolik možností takového nákupu máme?

Permutace s opakováním

Věta

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$. Potom počet všech pořadí těchto prvků je

$$\frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Hovoříme o *permutacích s opakovaním*.
Příklad: Přesmyčky

Variace s opakováním

Definice

Variace s opakováním je uspořádaná k-tice prvků z dané n-prvkové množiny, přičemž každý prvek množiny se může v této k-tici vyskytovat v libovolném počtu kopií.

Věta

Počet variací s opakováním k-tého stupně třídy n je n^k.

Pozn.: Všimněme si, že nyní není potřeba $k \leq n$

Příklad: Počet k-ciferných čísel

Kombinace s opakováním

Definice

Kombinace s opakováním je neuspořádaná k-tice prvků z dané n-prvkové množiny, přičemž každý prvek množiny se může v této k-tici vyskytovat v libovolném počtu kopií.

Věta

Počet kombinací s opakováním k-tého stupně třídy n je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Pozn.: Důkaz není přímočarý, opírá se o princip bijekce/kódování.

Příklad: Nákup ovoce

Základní kombinatorické principy

Základní kombinatorické principy

- princip součtu (rozdílu)
- princip součinu (podílu)
- princip bijekce (kódování)
- princip inkluze a exkluze [Příště]
- rekurentní metody

Kontrolní mechanismy a otázky

- počítám každý případ právě jednou?
- dávám celočíselnou odpověď?
- dává odpověď smysl pro malé hodnoty?
- umím výsledek spočítat více způsoby?

Rekurentní metody

Příklad (Schody)

Kolika způsoby lze vyjít 10 schodů, pokud mohu dělat kroky po 1, 2 nebo 3 schodech.

Řešme obecně pro n schodů. Označme počet $p(n)$.
Platí: $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 4$ $(1+1+1; 1+2; 2+1; 3)$

Pozn.: Má smysl uvažovat i $p(0) = 1$.

Rozdělíme podle prvního kroku:

- 1 schod ... zbývá $n-1$ schodů. tj. $p(n-1)$ způsobů
- 2 schody ... zbývá $n-2$ schodů. tj. $p(n-2)$ způsobů
- 3 schody ... zbývá $n-3$ schodů. tj. $p(n-3)$ způsobů

Celkem

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) + p(n-3)\,.$$

Tj. $p(4) = p(3) + p(2) + p(1) = 7$, $p(5) = 13, \ldots, p(10) = 274$.

Jedná se o příklad *diferenční rovnice*.

Diferenční rovnice

Definice

Diferenční rovnice řádu k je formule

$$f(n+k) = F(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)),$$

kde F je funkce v $k+1$ promněnných.
Poslopunost $f(0), \dots, f(k-1)$ nazýváme počáteční podmínky.

Funkce F a počáteční podmínky jednoznačně určují posloupnost

$$(f(n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(n))_{n=0}^{\infty}\,.$$

Příklad (Diferenční rovnice prvního řádu)

$$f(n+1) = f(n)\cdot(n+1), \quad f(0) = 1\,.$$

Zde $F(x,y) = y\cdot x + y$. Rovnice zadává funkci $f(n) = n!$

Lineární diferenční rovnice

Definice

Diferenční rovnice se nazývá *lineární*, jestliže existují skaláry(konstanty) $a_0, a_1, \ldots, a_k, b$ takové, že $F(x_0, x_1, \ldots, x_k) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k + b$.

Příklad (Lineární diferenční rovnice třetího řádu)

Fromule z příkladu Schody

$$p(n+3) = p(n) + p(n+1) + p(n+2), \quad p(0) = p(1) = 1, p(2) = 2$$

je lineární diferenční rovnice třetího řádu.
Zde dokonce $a_0 = b = 0$. $\quad (a_1 = a_2 = a_3 = 1)$

Dost často, představuje promněnná n časový údaj/parametr. Potom $a_0 = 0$, znamená, že $f(n)$ “je nezávislé na čase”, tj. závisí pouze na předchozích hodnotách $f(n-1), f(n-2)$, atd.

Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice prvního řádu (nezávislá na čase):

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b, \quad a, b \in \mathbb{Z}\,.$$

Pro $b = 0$ dostáváme snadno $f(n) = a^n \cdot f(0)$.

Příklad (Malthusiánský model populačního růstu)

Populace roste s konstatní úměrou vzhledem k předchozímu stavu. (Např. “populace králíků se za půl roku zdvojnásobí.”)

Pro $b \neq 0$ reálnější (např. úmrtnost v populaci).
Vrátíme se k tomuto modelu později.

Příklad (Úročení — půjčky, spoření)

Výše nesplaceného dluhu je v každém měsíci úročena, tj. násobíme konstantou a (např. $a = 1{,}01$ při měsíčním úroku 1%, tj. 12% p.a.) a snížena o výši splátky b.

Úročení – příklad

Příklad

Půjčíme častku C, při měsíčním úroku u a měsíční splátce S. Jaká je výše dluhu po n měsících?

Předpokládáme, že banka účtuje na konci měsíce, přičemž my v poslední den měsíce současně uhradíme měsíční splátku. Tj. banka připíše úrok z nesplaceného dluhu a sníží vzniklou částku o naši měsíční splátku. Výši dluhu na konci n-tého měsíce označme d_n. Předně $d_0 = C$. Dále

$$d_1 = (1 + u) \cdot d_0 - S\,.$$

Obecně

$$d_{n+1} = (1 + u) \cdot d_n - S, \quad a = 1 + u,\ b = -S\,.$$

Úročení – příklad – pokračování

$$d_{n+1} = (1+u) \cdot d_n - S, \quad d_0 = C$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= d_0 \cdot (1+u) - S \\
d_2 &= d_1 \cdot (1+u) - S = d_0 \cdot (1+u)^2 - S \cdot (1+u) - S \\
d_3 &= d_0 \cdot (1+u)^3 - S \cdot (1+u)^2 - S \cdot (1+u) - S \\
&\vdots \\
d_n &= d_0 \cdot (1+u)^n - S \cdot [(1+u)^{n-1} \cdots + (1+u) + 1]
\end{aligned}$$

Pozn.: Víme $a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a-1}$.

$$d_n = C \cdot (1+u)^n - S \cdot \frac{(1+u)^n - 1}{u}$$

Úročení – výše splátky

Příklad

Půjčíme si částku C, při měsíčním úroku u. Jaká má být měsíční splátka pokud chceme dluh splatit po n měsících?

$$d_n = C \cdot (1+u)^n - S \cdot \frac{(1+u)^n - 1}{u}$$

Chceme $d_n = 0$. Pak

$$S = C \cdot \frac{(1+u)^n \cdot u}{(1+u)^n - 1}\,.$$

Příklad

Půjčíme si častku $C = 160.000$, při ročním úroku $13,9\%$

Pozn.: Měsíční úrok $13.9/12$, tzn. $u = 0,01158\overline{3}$. Přesnější výpočet $\sqrt[12]{1.139} - 1$.

na dobu $n = 72$ měsíců? $S = 3.288$

Úročení – výše splátky – realita

Příklad

Půjčíme si částku $C = 160.000$, při ročním úroku 13.9% na dobu $n = 72$ měsíců? $S = 3.288$

Předchozí příklad vznikl na motivy reálné nabídky jedné banky: Půjčka 160 tis., úrok $13,9\%$ p.a., 72 měsíců, splátka 3.549. Proč?

- Poplatek 1.000 za uzavření, vlastně $C = 161.000$.
- Poplatek 150 měsíčně za vedení dluhu. (spousta práce)
- Stejně nevychází, asi jiný model úročení (po dnech, spojité) nebo odložená první splátka, nebo další skryté poplatky? Čert ví.

Úročení – výše úroku

Příklad

Půjčíme si častku $C = 160.000$ na $n = 72$ měsíců při měsíční splátce $S = 3.549$. Jaký je skutečný úrok?

$$S = C \cdot \frac{(1+u)^n \cdot u}{(1+u)^n - 1}$$

Chceme vypočítat u. Nevyjádříme explicitně, ale numericky lze určit.

Pozn.: $f(u) = \frac{(1+u)^n \cdot u}{(1+u)^n - 1}$ je rostoucí funkce v promněnné u.

$u = 0,01407$, tj. roční cca $16,9\%$.
Proto se uvádí RPSN, což je zhruba hodnota o niž jsme se pokoušeli (přesnější).

Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Příklady:

- Zjistit výši splátek půjčky.
- Zjistit délku splácení při dané měsíční splátce.
- Zjistit výši “reálného” úroku.
- Spoření.
- Složitější zadání: stavební spoření (příspěvek státu, daň, poplatky).

Při přesných analýzách je třeba brát do úvahy inflaci, daně, změny úrokových sazeb, atd.

Další příklady na lineární diferenční rovnice - viz skripta. (kombinatorika - rekurentní metody)

Skorolineární diferenční rovnice prvního řádu

Předchozí odvození pro lineární rovnice prvního řádu lze zobecnit na rovnice, kde $F(x, y)$ je lineární vzhledem k y, tj. tvaru $F(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$.
Tzn. na rovnice s tzv. promněnnými koeficienty:

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n \,.$$

Pro tuto rovnici platí

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) \cdot f(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a_i \right) b_j \,.$$

Pozn.: Uvádíme spíše pro zajímavost.

Jednoduchý příklad: faktoriál. Zde $b_n = 0$ pro všechna n.

Shrnutí, požadavky

- Komplexní čísla: násobení, dělení, umocňování. (K čemuž je potřeba absolutní hodnota, algebraický a goniometrický tvar.)
- Kombinatorika: elementární příklady na princip součtu a součinu; permutace, variace a kombinace s opakováním i bez; rekurentní metody.
- Lineární diferenční rce: jednoduché příklady na úročení.