Lineární modely – 11. přednáška

Lineární diferenční rovnice

Ondřej Klíma

2. 5. 2013

Osnova přednášky

- Reálné polynomy a jejich kořeny
- Lineární diferenční rovnice
- Homogenní lineární diferenční rovnice
- Nehomogenní lineární diferenční rovnice

Polynomy s reálnými koeficienty

- Kořen polynomu $f \in \mathbb{K}[x]$ je $c \in \mathbb{K}$ takové, že $f(c) = 0$.
- Prvek $c \in \mathbb{K}$ je kořenem f právě tehdy, když $(x - c) \mid f$.
- Argument: dělíme se zbytkem $f = (x - c) \cdot q + r$, kde r je polynom menšího stupně, tzn. konstanta.
- Nechť $f \in \mathbb{K}[x]$ je nenulový polynom a $c \in \mathbb{K}$ kořen f. Přirozené číslo k se nazývá násobnost kořene c, jestliže $(x - c)^k \mid f$ a $(x - c)^{k+1} \nmid f$.
- Nenulový polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně n má právě n kořenů, počítáme-li je i s jejich násobností.
- Je-li c dvojnásobný kořen f, pak $f(x) = (x - c)^2 g(x)$. Proto c je kořenem

$$f'(x) = 2(x - c)g + (x - c)^2 g' = (x - c)(\dots)\,.$$

- Je-li f polynom s reálnými koeficienty a c jeho kořen, potom komplexně sdružené číslo $\overline{c}$ je také kořenem f.

Hornerovo schéma

- Jak se efektivně počítá $f(c)$?
- Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Pak

$$f(x) = ((\dots((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \dots) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

- Proto po dosazení c máme

$$f(c) = ((\dots((a_n c + a_{n-1}) \cdot c + a_{n-2}) \dots) \cdot c + a_1) \cdot c + a_0$$

- Hornerovo schéma je tabulkový zápis tohoto výpočtu:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	$\dots$	a_i	$\dots$	$\dots$	a_1	a_0
c	a_n	$a_n c + a_{n-1}$	$\dots$	b_i	b_{i-1}	$\dots$	b_1	b_0	$f(c)$

kde $b_{i-1} = b_i \cdot c + a_i$, $f(c) = b_0 \cdot c + a_0$.

Hornerovo schéma – příklad

Příklad

Určete zda je $c = -3$ kořenem polynomu

$$f = 2x^6 + 5x^5 - 2x^4 - 7x^2 + 5x - 3.$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 2 & 5 & -2 & 0 & -7 & 5 & -3 \\ \hline -3 & 2 & -1 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Proto $f(-3) = 0$.

Hornerovo schéma – pokračování

- Pro dělení se zbytkem $f(x) = (x - c) \cdot q + r$, platí $r = f(c)$.
- Nechť $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
  $q = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.
- Porovnejme koeficienty v $f(x) = (x - c) \cdot q + r$. Dostaneme:

$$
\begin{array}{lll}
x^n & a_n = b_{n-1} & b_{n-1} = a_n \\
x^{n-1} & a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1}c & b_{n-2} = b_{n-1}c + a_{n-1} \\
 & \ldots & \ldots \\
x^i & a_i = b_{i-1} - b_i \cdot c & b_{i-1} = b_i \cdot c + a_i \\
 & \ldots & \ldots \\
x & a_1 = b_0 - b_1 c & b_0 = b_1 c + a_0 \\
 & a_0 = r - b_0 c & r = b_0 c + a_0
\end{array}
$$

-

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	$\ldots$	a_i	$\ldots$	$\ldots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_i	b_{i-1}	$\ldots$	b_1	b_0	r

Příklad

Určete násobnost kořenu $c = -3$ polynomu

$$f = 2x^6 + 5x^5 - 2x^4 - 7x^2 + 5x - 3.$$

- $$\begin{array}{c|ccccccc} & 2 & 5 & -2 & 0 & -7 & 5 & -3 \\ \hline -3 & 2 & -1 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$
- Tedy $f(x) = (x+3)(2x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$.
- $c = -3$ je vícenásobný, jestliže je kořenem polynomu

$$2x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1\,.$$

- $$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ \hline -3 & 2 & -7 & 22 & -69 & 209 & -628 \end{array}$$ Není.

Racionální kořeny

Věta

Nechť $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ *a* $\frac{p}{q}$ *je racionální kořen polynomu* f *takový, že* $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ *a* $\mathrm{nsd}(p, q) = 1$. *Pak* $q \mid a_n, p \mid a_0$.

Příklad

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $f(x) = 4x^3 + x^2 - x + 5$.

Pokud je racionální číslo c kořenem f, pak

$$c \in \left\{1, -1, 5, -5, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\right\}.$$

Pozn: v předchozím příkladu jsme násobnost nemuseli zkoušet.

Diferenční rovnice

Definice

Diferenční rovnice řádu k je formule

$$f(n+k) = F(n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)),$$

kde F je funkce v $k+1$ promněnných.
Posloupnost $f(0), \ldots, f(k-1)$ nazýváme počáteční podmínky.

Funkce F a počáteční podmínky jednoznačně určují posloupnost

$$(f(n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(n))_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\omega}.$$

Lineární diferenční rovnice

Definice

Diferenční rovnice se nazývá *lineární*, jestliže existují skaláry(konstanty) $a_0, a_1, \ldots, a_k, b$ takové, že $F(x_0, x_1, \ldots, x_k) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k + b$.

Příklad (Lineární diferenční rovnice druhého řádu)

Fibonacciho posloupnost (vycházení schodů)

$p(n+2) = p(n+1) + p(n), \quad p(0) = p(1) = 1$

je lineární diferenční rovnice.

Zde dokonce $a_0 = b = 0$. $\quad (a_1 = a_2 = 1)$.

Homogenní lineární diferenční rovnice

Definice

Homogenní lineární diferenční rovnice řádu k je formule

$$f(n+k) = a_1 f(n) + a_2 f(n+1), \cdots + a_k f(n+k-1)\,.$$

- Píšeme také:

$$x_n + b_1 x_{n-1} + \cdots + b_k x_{n-k} = 0\,.$$

- Hovoříme též o homogenní lineární rekurenci.
- Řešení je nekonečná poslopnost $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\omega}$.
- Součet dvou řešení je opět řešení.
- Skalární násobek řešení je opět řešení.
- Množina řešení je vektorovým prostorem a každý vektor je jednoznačně dán posloupností $x = (x_n)_{n=0}^{k-1} \in \mathbb{R}^{k}$.
- Tzn. dimenze je rovna řádu k.
- Rádi bychom nalezli vhodná bázická řešení.
- Ostatní řešení dostaneme jako jejich lineární kombinace.

Hledání bazických řešení

- Uvažujme možnost $x_n = \lambda^n$ pro nějaký skalár λ.
- Pak dostáváme podmínku

$$\lambda^{n-k}(\lambda^k + b_1\lambda^{k-1} \cdots + b_k) = 0$$

- Ta znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. charakteristického polynomu v závorce.
- Zde předpokládáme $b_k \neq 0$, tj. 0 není kořenem charakteristického polynomu.
- Předpokládejme, že charakteristický polynom má k různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
- Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení $x_n = (\lambda_i)^n$.
- Můžeme za tímto účelem rozšířit uvažované pole skalárů z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$ (později).

Hledání bazických řešení – pokračování

- Nezávislost plyne z nezávislosti k vektorů $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{k-1})$.
- K tomu se použije Vandermondův determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le k} (\lambda_i - \lambda_j)$$

- Potom libovolné řešení zadané homogenní lineární diferenční rovnice je tvaru

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \cdots + c_k \lambda_k^n.$$

- Konstanty c_i určíme tak, abychom splnili počáteční podmínky. Řešíme soustavu k rovnic s neznámými c_i.

Příklad — Fibonacciho posloupnost

- Rekurence $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_0 = x_1 = 1$.
- Charakteristický polynom: $\lambda^2 - \lambda - 1$.
- Kořeny $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Explicitní vztah $p(n) = c \cdot \lambda_1^n + d \cdot \lambda_2^n$, kde $p(0) = p(1) = 1$.
- Tedy $1 = c + d$ a $1 = c \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + d \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Odkud $c = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_1, d = -\frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2$.
- Celkem

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} .$$

- Všimněme si, že $p(n) \in \mathbb{N}$.

Technické komplikace: násobné kořeny, nereálné kořeny, nehomogenní rovnice.

Násobné kořeny

- Nechť λ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu $f(x)$.Tedy $f'(\lambda) = 0$.
- Pro $f(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k x^0$ víme

  $f'(x) = kx^{k-1} + b_1(k-1)x^{k-2} + \cdots + b_{k-1} + 0$ a proto

  $$0 = \lambda f'(\lambda) = k\lambda^k + b_1(k-1)\lambda^{k-1} + \cdots + b_{k-1}(1)\lambda + b_k(0)\lambda^0$$

- Dostáváme řešení $x_n = n \cdot \lambda^n$ zadané diferenční rovnice.
- Podobně se postupuje — použitím vyšších derivací — v případě vícenásobných kořenů.
  - Dostáváme dále řešení: $x_n = \binom{n}{2} \cdot \lambda^n$, $x_n = \binom{n}{3} \cdot \lambda^n$, ...
  - Nebo výběrem jiné báze: $x_n = n^j \lambda^n$ pro $j = 0, \ldots, \ell - 1$.
  - Opět nezávislé vektory/posloupnosti.

Příklad — násobné kořeny

- Rekurence $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}, x_0 = 0, x_1 = 4$.
- Charakteristický polynom: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.
- Dvojnásobný kořeny $\lambda_1 = 2$.
- Explicitní vztah $p(n) = c \cdot 2^n + d \cdot n2^n$, kde $p(0) = 0, p(1) = 4$.
- Tedy $0 = c$ a $4 = c \cdot 2 + d \cdot 2$. Tj. $d = 2$.
- Celkem
$$p(n) = n \cdot 2^{n+1} .$$

Nereálné kořeny

- Nechť λ_1 je nereálný kořen charakteristického polynomu $f(x)$. Tedy $f(\lambda_1) = 0$, kde $\lambda_1 = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ a $\lambda_2 = |z|(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$.
- Potom $\lambda_1^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ a $\lambda_2^n = |z|^n(\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi))$.
- Odtud $\frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = |z|^n\cos(n\varphi) \in \mathbb{R}$ a také $\frac{1}{2i}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = |z|^n\sin(n\varphi) \in \mathbb{R}$ (pro libovolné n).
- Řešení rekurence jsou také $x_n = c \cdot |z|^n\cos(n\varphi) + d \cdot |z|^n\sin(n\varphi)$, kde c, d jsou libovolná reálná čísla.
- Opět potřebujeme nezávislost a můžeme kombinovat s ostatními bazickými řešeními.

Příklad — nereálné kořeny

- Rekurence $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}, x_0 = 0, x_1 = 1$.
- Charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$.
- Kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4})$.
- Explicitní vztah $p(n) = c \cdot \sqrt{2}^n \cos(\frac{n\pi}{4}) + d \cdot \sqrt{2}^n \sin(\frac{n\pi}{4})$, kde $p(0) = 0, p(1) = 1$.
- Tedy $0 = c$ a $1 = c + d$. Tj. $d = 1$.
- Celkem

$$p(n) = \sqrt{2}^n \sin(\frac{n\pi}{4}) .$$

Nehomogenní diferenční rovnice

- Nehomogenní lineární diferenční rovnice řádu k je formule

$$f(n+k) = a_1 f(n) + a_2 f(n+1), \cdots + a_k f(n+k-1) + b(n)\,,$$

  kde $a_1, \ldots, a_k$ jsou skaláry (z $\mathbb{R}$) a b polynom (nad $\mathbb{R}$).
- Všechna řešení nehomogenních lineárních diferenčních rovnic můžeme dostat tak, že najdeme jedno řešení a přičteme celý vektorový prostor dimenze k řešení odpovídajících zhomogenizované diferenční rovnici.
- Hledáme (tzv. partikulární) řešení ve tvaru polynomu

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_s n^s$$

  s neznámými koeficienty α_i, $i = 1, \ldots, s$, kde s je stupeň polynomu b.
- Dosazením do diferenční rovnice dostatneme systém $s+1$ rovnic pro $s+1$ proměnných α_i.

Příklad — nehomogenní diferenční rovnice

Příklad

Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n - n, \quad x_0 = 2,\ x_1 = 5.$$

- Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$.
- Partikulárním řešením je $\frac{n}{2} + \frac{1}{4}$.
- Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy $a(-1)^n + b2^n + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$.
- Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$\frac{1}{4}(-1)^{n+1} + 2^{n+1} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}.$$

Shrnutí

- Prostor všech řešení homogenní lineání diferenční rovnice řádu k je vektorový prostor dimenze k.
- Všechna řešení jsou generována fundamentálním systémem k řešení, který lze obdržet z kořenů charakteristického polynomu.
- Všechna řešení nehomogenní lineání diferenční rovnice obdržíme, když přičteme jedno pevně zvolené partikulární řešení ke všem řešením zhomogenizované lineání diferenční rovnice.
- Řešení vyhovující daným počátečním podmínkám $x_0 = f_0, \dots, x_{k-1} = f_{k-1}$ hledáme z obecného řešení dosazením podmínek a určením koeficientů lineání kombinace fundamentálních řešení.

Požadavky

Řešení lineárních diferenčních rovnic

- řádu 2 a 3
- a to homogenních i nehomogenních
- s to i s násobými a komplexními kořeny