Lineární modely – 12. přednáška

Lineární procesy

Ondřej Klíma

9. 5. 2013

Osnova přednášky

- Příklad populačního modelu
- Leslieho model růstu
- Pozitivní a primitivní matice
- Markovovy procesy

Příklad populačního modelu – stádo ovcí

- Stádo ovcí, 5 kategorií: nová jehňata(0-1), stará jehňata(1-2), mladé ovce(2-3), ovce(3-4) a staré ovce(4-5).
- Počet kusů v čase t (např. roky od začátku chovu) značíme $x_0(t)$ (nová jehňata), $x_1(t)$ (stará jehňata) atd. Stav stáda v čase t je tedy $X(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$.
- Známe relativní roční změny:
  - Úhyn v jednotivých kategoriích:
    $x_4(t+1) = 0.6 \cdot x_3(t)$ $\quad$ $x_3(t+1) = 0.7 \cdot x_2(t)$
    $x_2(t+1) = 0.8 \cdot x_1(t)$ $\quad$ $x_1(t+1) = 0.95 \cdot x_0(t)$
  - Reprodukce: $x_0(t+1) = 0.2 \cdot x_1(t) + 0.8 \cdot x_2(t) + 0.6 \cdot x_3(t)$
- Tedy $X(t+1) = A \cdot X(t)$ s konstantní maticí A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

Stádo ovcí – pokračování

- Vlastní čísla (přibližně): 1.03, 0, -0.5, $-0,27+0.74i$, $-0.27-0.74i$ s velikostmi $1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78$
- Ideální stav: pět různých vlastních čísel λ_i, tj. vlastní vektory v_i tvoří bázi $\mathbb{C}^5$. Pouze pro $\lambda_0 = 1.03$ je $|\lambda_0| \geq 1$.
- Libovolný vektor v $\mathbb{C}^5$ lze (jednoznačně) vyjádřit $v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_4 v_4$ a můžeme spočítat
$$A \cdot v = A \cdot a_0 \cdot v_0 + A \cdot a_1 \cdot v_1 + \cdots + A \cdot a_4 \cdot v_4 = \\ = \lambda_0 a_0 v_0 + \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_4 a_4 v_4.$$
Obecně $A^k \cdot v = \lambda_0^k a_0 v_0 + \lambda_1^k a_1 v_1 + \cdots + \lambda_4^k a_4 v_4$.
- Pro zvětšující se k se budou mocniny$\lambda_1^k, \ldots, \lambda_4^k$ blížit 0. Tzn. pro velká k máme $A^k \cdot v \sim \lambda_0^k a_0 v_0$.
- Poměrná věková struktura stáda bude konvergovat k poměrům ve vlastním vektoru v_0 (nebo vymře).
- Zde v_0 je přibližně $(30, 27, 21, 14, 8)$. (Součtem souřadnic je 100, tj. vidíme výsledné procentní rozložení populace.)

Lineární iterované procesy

- Procesy bývají popsány prostřednictvím lineární transformace pro jednotlivá časová období (linearizovaný model). Budeme chtít studovat jeho chování během delší doby.
- Například zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.).
- Stav, závisející na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme, je tedy dán vektorem $X_n = (x_1(n), \dots, x_m(n))^T$.
- Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu z vektoru X_n na vektor $X_{n+1} = A \cdot X_n$ při přechodu z t_n na t_{n+1}.

Leslieho model růstu

Příkladem lineárních procesů je *Leslieho model růstu* s maticí

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ \tau_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

ve které:

- f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém období vznikne z N jedinců v i–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první);
- τ_i je relativní úmrtnost i-té skupiny během jednoho období.
- Platí $\tau_i \in [0, 1]$ a $f_i \geq 0$. Lze dokázat, že existuje jediné kladné reálné vlastní číslo. (Idea následuje.)

Leslieho model růstu – charakteristický polynom

$$A = \begin{pmatrix} f_1 - \lambda & f_2 & f_3 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ \tau_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{m-1} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$D_m = -\lambda D_{m-1} + f_m(-1)^{m+1} \prod_{i=1}^{m-1} \tau_i$$

$$d_m = (-1)^m D_m = \lambda d_{m-1} - f_m \prod_{i=1}^{m-1} \tau_i$$

$$d_m = \lambda^m - (\sum_{k=1} \lambda^{m-k} \cdot f_k \prod_{i=1}^{k-1} \tau_i)$$

Perronova–Frobeniova teorie

Věta

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s nezápornými prvky, jejíž nějaká mocnina A^k má samé kladné prvky. Pak platí

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$ – tzv. dominantní vlastní číslo,*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

- A je pozitivní, jestliže je čtvercová reálná matice jejíž všechny prvky jsou kladné.
- A je primitivní, jestliže je čtvercová reálná matice a existuje k tak, že A^k je pozitivní.

Aplikace na Leslieho model

- Pokud je matice v Leslieho modelu primitivní, pak máme jediné dominantní vlastní číslo.
- Existuje příslušný vlastní vektor v_0, který má kladné všechny složky. A tento vektor tvoří stabilní generační distribuci.
- Pokud jsou ostatní vlasní čísla velikosti menší než 1 a dominantní vlastní číslo je větší nebo roveno 1, pak každá počáteční generační distribuce konverguje k poměrům v stabilní distribuci v_0 nebo konverguje k nulové distribuci (populace vymře).
- Pokud jsou všechna vlastní čísla menší než 1, pak každá počáteční generační distribuce konverguje k nulové distribuci.
- Leslieho matice je primitivní například pokud jsou všechny parametry f_j, τ_i kladné.

Příklady na Leslieho model růstu

V Leslieho modelu řešíme úlohy:

- Zjistit tendenci vývoje v dlouhodobém horizontu (viz příklad s ovcemi):
  - vymření populace, stabilizace nebo expanze (přemnožení),
  - poměrná struktura populace.
- Určit vhodnou modifikaci parametrů, aby došlo ke stabilizaci populace:
  - odběr pěstovaných kusů na prodej,
  - nasazení přirozených nepřátel zabraňujících přemnožení v modelu dravec-kořist.

Příklad

V příkladu „stádo ovcí“ určete, kolik procent nových jehňat lze každý rok prodat.

Příklad – stádo ovcí – kontrola populace prodejem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní chceme určit z tak, aby matice A měla vlastní vektor $\mathbf{1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$p(\lambda) = (-1)^5(\lambda^5 - \lambda^4 f_1 - \lambda^3 f_2\tau_1 - \lambda^2 f_3\tau_2\tau_1 - \lambda f_4\tau_3\tau_2\tau_1 - \lambda f_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1)$$
$$p(1) = 1 - f_2\tau_1 - f_3\tau_2\tau_1 - f_4\tau_3\tau_2\tau_1 =$$
$$= 1 - z(0.2 + 0.8\cdot 0.8 + 0.6\cdot 0.7\cdot 0.8) = 1 - z\cdot 1.176$$

Odtud $z = \frac{1}{1.176} \sim 0.85$. Cca $0.95 - z = 0.1 \sim 10\%$ lze prodat.

Příklad – stádo ovcí – poznámky

- Není třeba počítat (natož znát zpaměti vzorec pro) charakteristický polynom Leslieho matice.

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ z & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -1 \end{pmatrix}$$

- Pokud nechceme počítat se zlomky, tak můžeme vzít matici $10A$, která má vlastní čísla desetinásobky vlastních čísel A.

Markovovy procesy

- Další případ lineárních procesů popisuje systémy, který se nachází v m různých stavech s různou pravděpodobností.
- V určitém čase je systém ve stavu s_i s pravděpodobností p_i. Tzn. popis systému v daném čase t je dán vektorem $P(t) = (p_1, p_2, \dots, p_m)$. Přičemž $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \in [0, 1]$.
- K přechodu z možného stavu j do stavu i dochází vždy (tj. nezávisle na čase) s pravděpodobností a_{ij}.
- Například pravděpodobnost stavu s_1 v čase $t+1$ se spočítá jako $p_1(t+1) = a_{11}p_1(t) + a_{12}p_2(t) + \dots a_{1m}p_m(t)$.
- Rozdělení pravděpodobností pro čas $n+1$ je dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $A = (a_{ij})$, tj. $P(t+1) = A \cdot P(t)$.
- Přitom pro libovolné j platí $\sum_{i=1}^{m} t_{ij} = 1$. (Součet v sloupci.) Matice $A = (a_{ij})$ je tzv. stochastická.
- Takovému procesu říkáme Markovův proces.

Stochastické matice

Vlastnosti stochastických matic.

- Každý pravděpodobnostní vektor $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_i (\sum_j a_{ij} p_j) = \sum_j (\sum_i a_{ij}) p_j = \sum_j p_j = 1.$$

- Z toho také plyne, že součin dvou stochastických matic je stochastická matice. Proto je stochastická každá matice A^k, kde A je stochastická a k libovolné přirozené číslo.
- Protože je součet každého sloupce matice A roven 1, je součet každého sloupce matice $A - E$ roven 0. Jsou proto řádky matice $A - E$ lineárně závislé a matice $A - E$ má nulový determinant.
- Tedy $|A - E| = 0$ a $\lambda = 1$ je vlastní číslo matice A a musí k ní existovat vlastní vektor.

Aplikace Perronovy-Frobeniovy věty

Důsledkem Perronovy-Frobeniovy věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- existence vlastního vektoru p_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní vektor
- přibližování hodnoty iterací $A^k p(0)$ k vektoru p_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor p_0.

První tvrzení vyplývá přímo z kladnosti souřadnic vlastního vektoru zmíněné v Perronově-Frobeniově větě, druhé pak z toho, že absolutní hodnoty všech ostatních vlastních čísel musí být ostře menší než jedna.

Druhou vlastnost je také možné formulovat tak, že posloupnost matic A^k konverguje, při zvětšujícím se k, k matici B, jež je tvořena stejnými sloupci, a to p_∞.

Markovův proces – příklad

Příklad (Sledovanost televizí)

Vysílají tři televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom měsíci přejde $1/4$ diváků první stanice ke druhé stanici a $1/4$ diváků ke třetí stanici. Tzn. $1/2$ diváků zůstane u první stanice. Dále, že z diváků druhé stanice přejde $1/3$ diváků k první stanici a $1/3$ diváků ke třetí stanici. Konečně z diváků třetí stanice přejde $1/2$ diváků k první stanici a $1/2$ diváků ke druhé stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Matice má dominantní vlastní hodnotu 1, příslušný vlastní vektor je $(4, 3, 2)$. Poměr diváků se ustálí na poměru $4 : 3 : 2$.

Příklad bez Perronovy-Frobeniovy věty

Příklad (Ruleta)

Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 100 Kč. Vždy všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá 800 Uvažte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.

Jednotlivé stavy systému jsou dány aktuální hodnotou, kterou hráč má. Jsou to tedy částky 0, 100, 200, 400 a 800 Kč. Výsledná matice je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$.

Příklad bez Perronovy-Frobeniovy věty – pokračování

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a+ab & a+ab & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & b & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & a+ab+ab^2 & a+ab & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & b^2 & b & 1 \end{pmatrix}, A^4 = A^3 \, .$$

- Proto $A^k = A^3$ pro libovolné $k \geq 3$. Matice A není primitivní.
- Nicméně lze počítat $A^k \cdot P(0)$ pro libovolný počáteční pravděpodobnostní vektor $P(0)$.
- Zejména $A^k \cdot (0, 1, 0, 0, 0)^T = (a + ab + ab^2, 0, 0, 0, b^3)$

Permutační matice – příklad

- Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Můžeme psát

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ kde } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- Potom

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}, B^2 = E_2, C^3 = E_3$$

- Tedy $A^6 = E$. A dochází k periodickému opakování.

Požadavky

Příklad který se může objevit na zkoušce:

- Leslieho model růstu – určit tendenci vývoje v dlouhodobém horizontu.
- Leslieho model růstu – modifikovat parametry tak, aby došlo ke stabilizaci populace.
- Markovovy procesy s primitivní maticí – určit limitní pravděpodobnostní rozložení (vektor).

Ve všech případech je třeba umět zkonstruovat matici ze slovního zadaní. Je také vhodné umět rozhodnout, zda matice je primitivní a vědět zda lze použít Perronovu-Frobeniovu teorii v plném rozsahu.