Lineární modely – 13. přednáška

Kuželosečky a kvadratické formy

Ondřej Klíma

16. 5. 2013

Osnova přednášky

- Kuželosečky – příklad
- Symetrické matice
- Klasifikace kuželoseček
- Kvadratické formy

Kuželosečka – příklad

Příklad

Popište kuželosečku $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 10$.

Věta

Nechť A je symetrická matice, která je maticí lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Potom platí následující.

- *Vlastní čísla jsou všechna reálná.*
- *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*
- *Existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory, v níž má zobrazení φ diagonální matici.*

Kvadratické formy

Mějme bilineární symetrickou formu $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Takovýmto zobrazením f říkáme **kvadratické formy** a výše uvedený vzorec pro hodnotu formy s použitím zvolených souřadnic se nazývá **analytický tvar** formy. Jestliže změníme bázi e_i na jinou bázi $e'_1, \dots, e'_n$, dostaneme pro stejný vektor jiné souřadnice $x = S \cdot x'$ a tedy

$$f(x) = (S \cdot x')^T \cdot A \cdot (S \cdot x') = (x')^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot x'.$$

Ortonormální báze pro kvadratické formy

Předchozí výpočet na prostoru se skalárním součinem můžeme shrnout: *matice bilineární formy F a tedy i kvadratické formy f se transformuje při změně souřadnic způsobem, který pro ortogonální změny souřadnic splývá s transformací matic zobrazení (skutečně, pak je $S^{-1} = S^T$)*:

Věta

Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak vztah

$$\varphi \mapsto f, \quad f(u) = F(u, u) = \langle u, \varphi(u) \rangle$$

zadává bijekci mezi symetrickými lineárními zobrazeními a kvadratickými formami na V.

Pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí).

Euklidovská klasifikace kvadrik

Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0.$$

V dalším kroku pro souřadnice x_i s $\lambda_i \neq 0$ provedeme doplnění do čtverců, které „pohltí“ kvadráty i lineární členy týchž neznámých (tzv. Lagrangeův algoritmus). Tak nám zůstanou nejvýše ty neznámé, pro které byl jejich koeficient u kvadrátu nulový, a získáme tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i)^2 + \sum_{j \text{ splňující } \lambda_j = 0} b_j x_j + c = 0.$$

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině

Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Volbou vhodné báze zaměření a následným doplněním čtverců dosáhneme tvaru (opět používáme stejného značení x, y pro nové souřadnice):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

kde a_i může být nenulové pouze v případě, že a_{ii} je nulové.

Posledním krokem obecného postupu, tj. v dimenzi $n = 2$ jen případnou volbou posunutí, dosáhneme právě jedné z rovnic:

$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$	prázdná množina
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$	elipsa
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$	hyperbola
$0 = x^2/a^2 - 2py$	parabola
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2$	bod
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2$	2 různoběžné přímky
$0 = x^2 - a^2$	2 rovnoběžné přímky
$0 = x^2$	2 splývající přímky
$0 = x^2 + a^2$	prázdná množina

Lagrangeův algoritmus

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:
(1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots \\ &= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 \\ &\qquad + \text{členy neobsahující } x_1 \end{aligned}$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,\ x_2' = x_2, \dots, x_n' = x_n.$$

Lagrangeův algoritmus – 2. část

Báze $v_1 = a_{11}^{-1} u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1} a_{12} u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1} a_{1n} u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerární forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1} x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.
(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u $x_2'^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n - 1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i-tém kroku bude prvek a_{ii} dosud získané matice nulový.

Lagrangeův algoritmus – 3. část

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.
(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i$, $k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi neboť jsme již dosáhli diagonální matici. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x'_k = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak $h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1).

Signatura kvadratické formy

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.
Počty jedniček a mínus jedniček nazýváme **signaturou kvadratické formy**. Opět tedy dostáváme úplný popis kvadratických forem ve smyslu, že dvě takové formy jsou převoditelná jedna na druhou pomocí afinní transformace tehdy a jen tehdy, když mají stejnou signaturu:

Věta o setrvačnosti

Věta (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \cdots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \cdots - (\varphi_r(u))^2.$$

Existuje tedy polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.
Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích právě, když mají stejnou hodnost a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

Definitnost forem

Při diskusi symetrických zobrazení jsme hovořili o definitních a semidefitních zobrazeních. Tatáž diskuse má jasný smysl i pro symetrické bilineární formy a kvadratické formy.

Kvadratickou formu f forma na reálném vektorovém prostoru V nazýváme

1. **positivně definitní**, je-li $f(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
2. **positivně semidefinitní**, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
3. **negativně definitní**, je-li $f(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
4. **negativně semidefinitní**, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
5. **indefinitní**, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Stejné názvy používáme i pro symetrické reálné matice, jsou-li maticemi patřičných kvadratických forem. Signaturou symetrické matice pak rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.

Požadavky

Dnes nic. Provedeme rekapitulaci nejpodstatnějších požadavků a témat během semestru.

- (1) Kombinatorika: elementární příklady na princip součtu a součinu; permutace, variace a kombinace s opakováním i bez; rekurentní metody.
- (2) Pravděpodobnost: elementární příklady, podmíněná a geometrická pravděpodobnost, princip inkluze a exkluze ($n \leq 5$).
- (3,5,7) Matice a soustavy lineárních rovnic: determinant, inverzní matice, vlastní čísla a vektory.
- (4) Geometrie v rovině: velikosti úseček a úhlů, viditelnost, obsah, otáčení, pravidelné n-úhelníky.
- (6) Vektorové prostory: báze a dimenzi podprostorů, souřadnice vektorů, skalární součin a ortogonální báze.
- (7) Lineární zobrazení: matice lineárního zobrazení v dané bázi, změna báze – matice přechodu, identifikace shodných zobrazení analýzou vlastních vektorů.

Požadavky II

- (8) Afinní geometrie přímek a rovin (zejména) – implicitní a parametrický popis, průničíky, příčky a osy mimoběžek.
- (9) Euklidovská geometrie: vzdálenost podprostorů, kolmá projekce, ortogonální doplněk, odchylka dvou přímek.
- (10) Lineární programování: geometrické řešení úlohy v rovině nebo algoritmické řešení zjednodušené úlohy.
- (11) Lineární diferenční rovnice (řádu 2 a 3): homogenní i nehomogenní, i s násobými a komplexními kořeny charakteristického polynomu.
- (12) Lineární procesy: Leslieho model růstu, Markovovy procesy s primitivní maticí.

Přeji mnoho zdaru.