Lineární modely - 4. přednáška

Geometrie v rovině

Ondřej Klíma

14. 3. 2013

Osnova přednášky

- Afinní geometrie
- Euklidovská geometrie
- Shodná a lineární zobrazení
- Matice lineárního zobrazení a jeho determinant

Souřadný systém

Motivace: chceme umět

- počítat s body a přímkami,
- měřit vzdálenosti a úhly,
- pracovat s přirozenými transformaci roviny.

Náším modelem bude afinní a Euklidovská geometrie.

Pozn.: Kořeny - Euklides (3. st. př. n. l.) axiomatická teorie.

Pozn.: Další možné geometrie: sférická, hyperbolická — není teď pro nás.

Souřadný systém:

- Počátek a dva základní posuny (kroky): $(B, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- Bod $X = B + a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_1$ reprezentujeme dvojicí $[a, b]$.
- Tedy $B \sim [0, 0]$, $E_1 \sim [1, 0]$.
- Rovinu reprezentujeme jako $\mathbb{R}^2$.

Přímky

Příklad

Popište přímku p procházející body $P = [200, 0]$ a $O = [0, 100]$.

Chceme znát směr této přímky. Víme $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PO}$. Proto

$$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BP} \sim [0, 100] - [200, 0] = (-200, 100)\,.$$

Konvence – body. . . hranaté závorky, vektory . . . kulaté závorky.
Parametrický popis: $P + t \cdot \overrightarrow{PO} = [200, 0] + t \cdot (-200, 100)$, tzn.

$$p = \{[200 - 200t, 100t] \mid t \in \mathbb{R}\}$$

nebo

$$p: \;\; x = 200 - 200t, \;\; y = 100t\,.$$

Přímky — obecná rovnice

- $p: \;\; x = 200 - 200t, \;\;\; y = 100t$

  Obecný popis – množina bodů daných vlastností:
  $x + 2y = 200$.
- Přechody
  - par. $\rightarrow$ ob. : $x = 200 - 200t, y = 100t$ dá $t = \frac{(200-x)}{200} = \frac{y}{100}$ odkud $200 - x = 2y$
  - ob.$\rightarrow$ par. : $q : 2x - 9y = 10$ vyřešíme $y = \frac{2}{9}x - \frac{10}{9}$ a můžeme psát $q : x = s, y = \frac{2}{9}s - \frac{10}{9}$
- $\overrightarrow{PO} = (-200, 100)$ nebo násobek, např. $(-2, 1)$, je tzv. směrový vektor přímky.
- $x + 2y = 200$; koeficienty $(1, 2)$ – tzv. normálový vektor přímky.

Průsečík přímek

Příklad

Určete průnik (průsečík) přímek $p: x + 2y = 200$ a $q: 2x - 9y = 10$.

- Obě přímky zadané obecnou rovnicí : řešíme soustavu.
- Jedna přímka obecně, jedna parametricky : dosadíme.
- Obě přímky zadané parametricky : sestaví se soustava a vyřeší.

Průsečík přímek — obecná diskuse

- Musí průsečík existovat?
  (Ne, přímky mohou být rovnoběžné.)
- $$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s. \end{aligned}$$
  Ekvivalentně:
  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$
- Eliminací x dostaneme rovnici $(ad - bc)y = as - cr$, tj. záleží zda $ad - bc = 0$.

Definice

Pro matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazýváme hodnotu $ad - bc$ determinant.

Skalární součin vektorů (Euklidovská geometrie)

Definice

Pro dvojici vektorů $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ definujeme

$$\langle u, v \rangle = ac + bd \,,$$

tzv. skalární součin vektorů.

- u a v jsou kolmé, právě když $\langle u, v \rangle = 0$.
- píšeme $u \perp v$
- příklad: směrový a normálový vektor přímky

Velikosti vektorů a úhlů (Euklidovská geometrie)

Definice

Velikost vektoru $u = (a, b)$ je $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Pro dvojici vektorů $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ se jejich odchylka spočítá pomocí vztahu:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

- Rozlišujeme odchylku vektorů a přímek. Pro přímky:

$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Obsah trojúhelníka

Příklad

Mějme body $A = [1, 1]$, $B = [7, 2]$, $C = [5, 5]$.
Určete obsah $\triangle ABC$.
Určete velikost úhlu u vrcholu A.

Příklad

Nalezněte formulku pro výpočet obsahu $\triangle ABC$, pokud $v = \overrightarrow{AB} = (a, b)$ a $u = \overrightarrow{AC} = (c, d)$.

Obsah rovnoběžníku zadaného vektory u a v je

$$\left| det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| .$$

Užitečné je ale i znaménko.

Orientovaný obsah a viditelnost

- Pro přímku p a bod X nám orientovaný obsah poskytuje nástroj jak rozhodnout, v které polorovině určené přímkou p se bod X nalézá.
- Nechť p má směrový vektor $\overrightarrow{AB}$. Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AX}$ dáme do řádků matice. Pokud je determinant kladný, je bod X „nalevo od vektoru“ $\overrightarrow{AB}$. Pokud je determinant záporný je bod „napravo“.

  Pozn.: Nezáleží zda do řádků nebo sloupců. Důležité je pořadí vektorů.

Příklad

Jsou dány následující body: $A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $P = [14, 14]$ a $R = [15, 3]$.
Rozhodněte, které strany a vrcholy $\triangle ABC$ jsou vidět z bodu P.
Rozhodněte, zda je bod R uvnitř $\triangle ABC$.

Změna souřadného systému

- Máme dva souřadné systémy $\alpha = (B, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ a $\beta = (P, \vec{f_1}, \vec{f_2})$.
- Známe $(X)_\alpha = [x, y]$ a chceme určit $(X)_\beta = [?, ?]$.
- $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{PB} + x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.
- Potřebujeme znát $(B)_\beta$, $(\vec{e_1})_\beta$, $(\vec{e_2})_\beta$.
- Pokud $(B)_\beta = [a_1, a_2]$, $(\vec{e_1})_\beta = (b_1, b_2)$, $(\vec{e_2})_\beta = (c_1, c_2)$, potom

$$(X)_\beta^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Podobnosti a shodnosti

Zkoumáme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Posunutí – jednoduché, přičítáme vektor w, $F(u) = u + w$.
- Předokládejme v dalším, že $F([0,0]) = [0,0]$.
- Základní vlastnost (lineární zobrazení):
  $F(u+v) = F(u) + F(v)$, $F(t \cdot u) = t \cdot F(u)$, pro lib. $t \in \mathbb{R}$.
- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = F(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) = xF(\vec{e_1}) + yF(\vec{e_2})$.
  Pokud $F(\vec{e_1}) = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}, F(\vec{e_2}) = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$ potom
  $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pozor linearita ještě neznamená podobnost.

Shodnosti a lineární zobrazení

- $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kde $A \in Mat_{2,2}(\mathbb{R})$.
- Sloupce A jsou $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ a $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, což pomáhá, když chceme matici A určit.
- Skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení příslušných matic.

Příklad

Napište formuli pro otočení o úhel α kolem počátku.

Příklad

Je dán pravidelný šestiúhelník se středem v bodě $[2, 2]$ a jedním vrcholem v bodě $[3, 3]$. Napište souřadnice všech jeho vrcholů.

Příklad

Popište všechna shodná zobrazení roviny do sebe.

- $$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
- Platí $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. Odtud
$$\begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$$
- Jedná se o rotaci nebo rotaci složenou se symetrií podle osy x.
- Rotace o úhel α má matici.
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Shrnutí, požadavky

- Příklady s přímkami — průsečíky, úlohy s časem.
- Velikosti úseček a úhlů.
- Obsahy *n*-úhelníků.
- Úlohy s aplikacemi shodných zobrazení.
- Úlohy na viditelnost.

Přídavek

Příklad

Máme kulečníkový stůl o rozmněrech 200×100, tj. „levý dolní roh“ má souřadnice $[0, 0]$ a „pravý horní roh“ má souřadnice $[200, 100]$. Ze středu $[100, 50]$ vyšlu kouli do bodu $[160, 100]$. Do kterého bodu (po dvou odrazech) dopadne koule na „spodní hraně“?

$[120, 0]$

Příklad

Napište formuli pro osovou souměrnost kolem osy, která svírá úhel α s osou x.