Lineární modely - 5. přednáška

Systémy lineárních rovnic a determinanty matic

Ondřej Klíma

21. 3. 2013

Osnova přednášky

- Soustavy lineárních rovnic
- Gausova eliminace
- Inverzní matice
- Determinanty matic
- Parita permutace (možná, není nezbytné)

Motivační příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic (v oboru $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

- Řešení $[x, y, z] = [1, 1, -1]$.
- Maticový zápis soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

V následujícím se omezíme na pole skalárů (např. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
I když některé idee lze bez potíží aplikovat v oborech integrity.

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

- Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

- Zápis pomocí násobení matic:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Stručně píšeme $A \cdot x = b$, kde $x \in \mathbb{K}^3$, $b \in \mathbb{K}^3$ (sloupce).
- Obecně $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ a tedy $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$.
  Přesněji $x \in Mat_{n,1}(\mathbb{K})$ a $b \in Mat_{m,1}(\mathbb{K})$.
- A matice soustavy, $(A \mid b)$ rozšířená matice soustavy.

Postup – elementární řádkové úpravy

- Dvě soustavy (rozšířené matice) jsou ekvivalentní, pokud mají stejná řešení.
- Postup – převod soustavy na ekvivalentní jednodušší soustavu.
- Realizace – pomocí elementárních řádkových úprav.

Elementární řádkové transformace:

- záměna dvou řádků;
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem (POLE);
- přičtení řádku k jinému řádku.

Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postup je algoritmický a většinou se mu říká Gausova eliminace proměnných.

Schodovitý tvar matice

Věta

Nenulovou matici nad libovolným polem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:

- *Je-li $a_{i1} = \cdots = a_{ij} = 0$, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$.*
- *Je-li $a_{i-1,j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-tém řádku, tzv. pivot, pak $a_{ij} = 0$.*

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1,m} \\ 0\ldots0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,k} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{2,m} \\ 0\ldots0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{l,p} & \ldots & a_{3,m} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

Příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Množina řešení soustavy (nad nekonečným polem $\mathbb{K}$) je: jednoprvková, prázdná nebo nekonečná.
Pro homogenní soustavy (pravé strany nulové) je množina řešení jednoprvková nebo nekonečná.

Algoritmus – Gausova eliminace

Algoritmus pro řešení systémů lineárních rovnic:

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

Algoritmus lze dále dokončit i tak, že matici vyeliminujeme do tzv. redukovaného schodovitého tvaru, kde pivot je jediný nenulový prvek v příslušném sloupci.
(Mluvíme o zpětné eliminaci.)

Inverzní matice

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní k čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$, přičemž matice B je čtvercová stejného rozměru n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Pokud řešíme soustavu $A \cdot x = b$ s invertibilní maticí A, pak $x = A^{-1} \cdot b$.

Postup výpočtu: snažme se určit matici X splňující $A \cdot X = E$ postupně po sloupcích.
První sloupec je řešením následujícího systému:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \quad \ldots \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

Inverzní matice – algoritmus

Algoritmus pro nalezení inverzní matice

1. Vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E.
2. Matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar.
3. Následně zpětnou eliminací na diagonální matici.
4. V té násobíme řádky inverzními prvky z $\mathbb{K}$, abychom dostali jednotkovou matici E.
5. Tytéž úpravy souběžně prováděné s vedle napsanou maticí E vedou k hledané inverzi A^{-1}.
6. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

Determinant – očekávání, plán

- Motivace – objem.
- Obecná (korektní) definice $|A|$ (pro čtvercovou matici A).
- Determinant a elementární řádkové úpravy.
- A^{-1} existuje právě tehdy, když $|A| \neq 0$.
- Použití pro přímý výpočet řešení soustavy.
- Výpočet determinantu.
- Determinant a součin matic – $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Determinant – matice typu 2×2, 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Pozor, pro větší rozměr nelze počítat takto „úhlopříčně“.

Determinant – definice

Definice

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad polem $\mathbb{K}$.
Determinant matice $|A|$ je prvek z $\mathbb{K}$ definovaný předpisem:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Zde S_n je množina všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
A $\operatorname{sgn}(\sigma)$ je parita permutace σ (přičemž $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$).

Pozn.: Formální definice parity – viz dodatek na konci slajdů.

Výpočet $|A|$ z definice není efektivní. Naučíme se jinak.

Determinant – základní poznatky

- Pro jednotkovou matice máme $|E| = 1$.
- Speciální vzorce $n = 2$, $n = 3$.
- Pokud A obsahuje nulový řádek, pak $|A| = 0$.
- Horní trojúhelníková matice – součin prvků na diagonále.
- Pro transponovanou matici $A^\top$ platí $|A|=|A^\top|$.

Definice

Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n definujeme $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ typu n/m.
Čtvercová matice A s vlastností $A = A^T$ se nazývá symetrická.
Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá antisymetrická.

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
- Jsou-li dva řádky čtvercové matice A stejné, pak $|A| = 0$.
- Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c \cdot |A|$.
- Nechť matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ a $C = (c_{ij})$ jsou tři čtvercové matice řádu n, které se od sebe liší pouze prvky k-tého řádku, přičemž k-tý řádek matice A je součtem k-tý řádků matic B a C, tj. $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ pro $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom $|A| = |B| + |C|$.
- Vznikne-li matice B z čtvercové matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.

Metoda výpočtu determinantu pomocí Gaussovy eliminace.
Pozor: obecně neplatí $|B + C| = |B| + |C|$.

Determinant – příklad výpočtu

Příklad

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminace: $|A| = 9$. Nebo z definice: $|A| = 8 + 5 - (-2) - 6 = 9$.

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Výsledek $|B| = 12$.

Výpočet determinantu – Laplaceův rozvoj

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pro zvolené indexy i, j označme A_{ij} čtvercovou matici řádu $n - 1$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak prvek

$$\widehat{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A.

Věta (Laplaceův rozvoj)

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro libovolný index i platí

$$|A| = a_{i1}\widehat{A_{i1}} + a_{i2}\widehat{A_{i2}} + \cdots + a_{in}\widehat{A_{in}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{A_{ij}}\,.$$

Hovoříme o rozvoji podle i-tého řádku.

Laplaceův rozvoj – příklad

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (8 - 14) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12$$

Všimeme si, že

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Inverze pomocí adjungované matice

- Laplaceův rozvoj pomocí sloupce — důkaz transponováním.
- Definujeme $\widehat{A} = (\widehat{A_{ij}})$ matici řádu n složenou z algebraických doplňků. K ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^\top$ nazýváme adjungovanou maticí k matici A.

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^* .$$

- Důsledek: A^{-1} existuje právě tehdy, když $|A| \neq 0$.
- Praktické použití je diskutabilní. Pro výpočet determinantů $|A_{ij}|$ je zapotřebí stejně eliminovat.

Cramerovo pravidlo

Řešíme rovnici $Ax = b$, kde A je čtvercová matice taková, že $|A| \neq 0$. Tudíž řešení je $x = A^{-1}b$.

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak soustava $Ax = b$ má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$, kde

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

přičemž A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem b.

Cramerovo pravidlo – příklad

Příklad (Motivační příklad)

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1, \qquad x_2, x_3 \; - \text{sami.}$$

Cauchyova věta

Věta

Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejného řádu platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Důsledek: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
Důkaz: ukázka matematické rafinovanosti.
Bloky v matici (submatice): jsou-li A a C čtvercové matice (ne nutně stejného rozměru) potom

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| \ .$$

Důkaz: idea stejná jako u trojúhelníkové matice.

Cauchyova věta – důkaz

Pro matice A a B stejného řádu uvažujeme matici F dvojnásobného řádu:

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}, \quad |F| = |A| \cdot |B| \, .$$

Tento determinant lze spočítat obvyklým způsobem:
1. Prohazování řádků mezi horní a dolní polovinou:

$$|F| = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} -E & B \\ A & 0 \end{vmatrix}.$$

2. násobení -1 v horní polovině:

$$|F| = \begin{vmatrix} E & -B \\ A & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Eliminace matice A v levém dolním rohu:

$$|F| = \begin{vmatrix} E & -B \\ 0 & AB \end{vmatrix} = |A \cdot B| \, .$$

Požadavky

- Vyřešit zadaný systém lineárních rovnic.
- Spočítat inverzní matici (dle algoritmu).
- Spočítat determinant matic (i matic s parametrem). Ovládat obě metody a umět je kombinovat
- Znát základní vlastnosti determinantů (Cauchyova věta).
- Znalost adjungované matice a Cramerovo pravidlo se nezkouší.

Dodatek – parita permutace (slajdy prof.Slováka)

Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří **inverzi v permutaci** σ, je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí. **Parita permutace** σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě sgn(σ). Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat. Z následujícího tvrzení už je jasně vidět, že Saarusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Theorem

Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací a každá transpozice mění paritu.

Dodatek – parita permutace II

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \ldots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.
Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \to X$ platí

$$\mathrm{sgn}(\sigma \circ \eta) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\eta), \quad \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$