Lineární modely - 6. přednáška

Vektorové prostory, báze, dimenze, ortogonalizace

Ondřej Klíma

28. 3. 2013

Osnova přednášky

- Vektorové prostory
- Báze a dimenze podprostorů
- Souřadnice vektorů
- Skalární součin, ortonormální báze

Motivace

- Vektory – sčítání, násobky.
- Uvažujme systém m lineárních rovnic pro n proměnných a předpokládejme, že jde o soustavu tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  - Součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje
  $$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$
  a je tedy také řešením.
  - Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$.
  - Máme tedy podmnožinu $\mathbb{K}^n$ sestávající ze všech řešení soustavy $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$ se sčítáním a násobky.

Vektorové prostory

Definice

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou jsou splněny axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{1}$$
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{2}$$
$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{3}$$
$$1 \cdot v = v \tag{4}$$

Připomenňme, že „axiomy komutativní grupy" jsou:

- pro všechna u, v, w platí $(u + v) + w = u + (v + w)$,
- pro všechna u, v platí $u + v = v + u$,
- existuje vektor 0 tak, že pro všechna u je $u + 0 = u$,
- pro všechna u existuje $(-u)$ tak, že $u + (-u) = 0$.

Vektorové prostory – příklady

Rozumné (známé) příklady:

- Vektory v rovině: $\mathbb{R}^2$.
- Prostory vyšší dimenze: $\mathbb{R}^n$.
- Matice nad polem: $Mat_{n,m}(\mathbb{R})$.
- Polynomy omezeného stupně:

  $$\mathbb{R}_4[x] = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

  Obecně $\mathbb{R}_n[x]$.
- Množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
- $\mathbb{C}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Vektorové prostory – příklady II

Poněkud složitější příklady:

- Polynomy: $\mathbb{R}[x]$.
- Funkce: $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{R}$ vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$.

Poslední dva jsou trochu divoké.

Příklady množin, které netvoří vektorový prostor.

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nad $\mathbb{R}$.
- $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\}$, pro b nenulové.
- Čtvercové matice s detrminantem 1.
- Polynomy stupně n.

Vektorové prostory – vlastnosti

Věta

Nechť V *je vektorový prostor nad polem skalárů* $\mathbb{K}$*, dále uvažme skaláry* $a, b, a_i \in \mathbb{K}$ *a vektory* $u, v, u_j \in V$*. Potom*

- $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$
- $(-1) \cdot u = -u$
- $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
- $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
- $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot u_j$.

Výběr optimálních základních vektorů

- Cíl: najít vhodnou, co nejmenší, základní množinu vektorů, tak aby bylo možné ostatní vektory pomocí nich vyjádřit.

Definice

- Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme lineární kombinace vektorů $v_1, \ldots, v_k \subseteq V$.
- Množina vektorů $M \subseteq V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineárně nezávislá, jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

- M je lineárně závislá, jestliže není lineárně nezávislá.

- Pokud je M závislá, pak aspoň jeden z jejích vektorů je vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních. (Platí i opak, pro $M \neq \emptyset$.)

Lineární kombinace – příklad

- Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$.
- Např. pro $m = 2$, jsou vektory $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$ plyne $a = b = 0$.
- Dále, vektory $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$.
- Ovšem stejná dvojice vektorů $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ je lineárně nezávislá nad $\mathbb{Q}$!

Odstraňování přebytečných vektorů

Základní množina vektorů, aby byla co nejmenší, musí být lineárně nezávislá. Jak to poznáme?

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ a $v_3 = (1, 2, 3)$ lineárně nezávislé (v reálném prostoru $\mathbb{R}^3$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení $x_1 = -2t, x_2 = -t, x_3 = t$. Nás zajímá nějaké konkrétní vyjádření. Volme tedy $t = 1$. Potom $-2 \cdot v_1 - v_2 + v_3 = 0$, tzn. $v_3 = 2 \cdot v_1 + v_2$.
Zkouška: $2v_1 + v_2 = (2, 2, 2) + (-1, 0, 1) = (1, 2, 3) = v_3$.
Odpověď: zadané vektory jsou lineárně závislé.

Odstraňování přebytečných vektorů II

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $x^3 - x + 1$, $2x^3 + x^2 - 2x$, $x^4 + x^3 - x$ a $x^4 - x^2 + 1$ lineárně nezávislé.

$$
\begin{array}{r}
x^4: \\ x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0:
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Odpověď: jsou lineárně závislé.

Postup (obecně): vektory dáme do (sloupců) matice a řešíme.

Pozn.: Jde i jinak. Dává se do řádků, ale pak musíte umět interpretovat.

Podprostory

Umíme se zbavovat přebytečných vektorů z potencionální základní množiny. Máme jich ale dost? Tj. stačí na vyjádření všech vektorů? K tomu definujeme další užitečný pojem.

Definice

Podmnožina $U \subseteq V$ se nazývá vektorovým podprostorem jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in U,\ a \cdot v + b \cdot w \in U.$$

Příklady:

- $\mathbb{R}_n[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$.
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$.
- Sudé funkce/polynomy $\{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(x) = f(-x)\} \subseteq \mathbb{R}_4[x]$. Přesněji: $\{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid (\forall c \in \mathbb{R})(f(c) = f(-c))\}$.

Generování podprostorů

- Nechť W_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V, $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \bigcap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, což znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \bigcap_{i \in I} W_i$.
- Tzn. průnik podprostorů je opět podprostor.
- Zejména je tedy podprostorem průnik všech podprostorů $W \subseteq V$, které obsahují danou množinu vektorů $M \subseteq V$.
- Říkáme, že M generuje podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou generátory podprostoru $\langle M \rangle$.

Věta

Pro každou podmnožinu $M \subseteq V$ platí

$$\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_i \in M\} .$$

Báze vektorového prostoru

Definice

- Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá báze vektorového prostoru V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.
- Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme konečněrozměrný, mohutnost báze nazýváme dimenzí V.
- Nemá-li V konečnou bázi, V je nekonečněrozměrný.
- Píšeme $\dim V \in \mathbb{N}$, resp. $\dim V = \infty$.
- Je-li V konečněrozměrný, pak bázi rozumíme uspořádanou k-tici $\alpha = (v_1, \ldots, v_k)$ bázových vektorů.

Pozn.: Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou"bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Důležitá otázka

Řádně si promysleme, co znamená $\langle M \rangle = \langle N \rangle$, kde M, N jsou konečné množiny generátorů.

Báze – základní poznatky

Věta

- *Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi.*
- *Všechny báze V mají stejný počet vektorů.*
- *Předchozí defince dimenze je korektní.*

Zapamatujme si:

- Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.
- Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny.
- Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů.

Báze – příklady

- $\mathbb{R}^2$: báze $((1,0),(0,1))$; dimenze 2.
- $\mathbb{R}^n$: báze $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, kde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$; dimenze n.
- $Mat_{n,m}(\mathbb{R})$: dimenze nm.
- $\mathbb{R}_4[x]$: báze $(x^4, x^3, x^2, x, 1)$; dimenze 5.
  $(\mathbb{R}_4[x] = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\})$
- $\mathbb{C}$: báze $(1, i)$; dimenze 2. (nad $\mathbb{R}$)
  Ovšem pokud uvažujeme $\mathbb{C}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, pak má dimenzi 1.
- $\langle\{(1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3)\}\rangle = \langle\{(1,1,1),(-1,0,1)\}\rangle$ dimenze 2.

Báze – příklad s polynomy

Příklad

Je dán vektorový prostor $V = \mathbb{R}_4[x]$. Určete bázi a dimenzi podprostorů P, Q, $P \cap Q$, kde

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid (\forall c \in \mathbb{R})(f(c) = f(-c))\},$$

$$Q = \langle\{x^3 - x + 1,\ 2x^3 + x^2 - 2x,\ x^4 + x^3 - x,\ x^4 - x^2 + 1\}\rangle.$$

- Už jsem spočítali bázi a dimenzi Q: dimenze je 3 a báze $(x^3 - x + 1,\ 2x^3 + x^2 - 2x, x^4 + x^3 - x)$.
- P má bázi $(x^4, x^2, 1)$ a dimenzi 3.
- Hledáme skaláry a, b, c, p, q, r tak, aby $ax^4 + bx^2 + c = pv_1 + qv_2 + rv_3$.
- To vede na řešení následující soustavy.

Báze – příklad s polynomy – pokračování

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Řešení: q, r volné promněné, $p = -r - 2q$.
- V průniku jsou tedy vektory tvaru

$$(-r-2q)\cdot(x^3 - x + 1) + q\cdot(2x^3 + x^2 - 2x) + r\cdot(x^4 + x^3 - x)$$
$$= q\cdot(x^2 - 2) + r\cdot(x^4 - 1)\,.$$

- Proto $P \cap Q$ má bázi $(x^2 - 2, x^4 - 1)$ a dimenzi 2.

Součet podprostorů

Definice

Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak podprostor $\langle \bigcup_{i\in I} V_i \rangle$, nazýváme součtem podprostorů V_i. Značíme $\sum_{i\in I} V_i$.

- Pro $V_1, \ldots, V_k \subseteq V$,

$$V_1 + \cdots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \rangle =$$

$$= \{v_1 + \cdots + v_k;\ v_i \in V_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

Věta

Pro U, W podprostory v konečněrozměrném V platí

- $\dim U \leq \dim V$,
- $U = V$ *právě když* $\dim U = \dim V$,
- $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.

Příklad s polynomy – součet podprostorů

Příklad

Určete bázi a dimenzi podprostoru $P+Q$.

- Sjednotíme báze a dostaneme množinu generátorů.
- Z ní vybereme bázi $P+Q$.
- Protože to už máme mimoděk spočítáno: báze $P+Q$ je například $(x^4, x^2, 1, x^3 - x + 1)$ a dimenze je 4.
- Zkouška: $\dim P + \dim Q = \dim(P+Q) + \dim(P \cap Q)$.
- Závěr: Báze a dimenze $P+Q$ a $P \cap Q$ lze počítat současně.

Souřadnice vektoru

- Když je $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$ báze V, můžeme každý vektor $v \in V$ psát jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.
- Pokud to lze udělat dvěma způsoby

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \,,$$

potom $0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_n - b_n) \cdot v_n$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

- Závěr: každý vektor lze zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinace bázových vektorů.

Definice

Koeficienty této jediné lineární kombinace, vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$, se nazývají souřadnice vektoru v této bázi. Píšeme $(v)_\alpha = (a_1, \dots, a_n)$.

Souřadnice vektoru – příklad

Příklad

Určete souřadnice vektoru $u = (3, 1, 2)$ bázi $\alpha = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0))$ prostoru $\mathbb{R}^3$.

- Hledáme skaláry a, b, c takové, že $a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(2, 0, 0) = (3, 1, 2)$.
- Tudíž potřebujeme vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

- Tedy $(u)_\alpha = (2, -1, 1)$.
- Tzn. opět dáváme vektory do sloupců a eliminujeme.
- Označíme-li $\epsilon = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, tzv. kakonickou bázi, pak $(u)_\epsilon = (3, 1, 2)$.
- Transformace souřadnic pro různé báze – příště.

Reprezentace konečněrozměrných prostorů

- Uvažme zobrazení φ_α, které vektoru $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\alpha = (v_1, \ldots, v_n)$. Tj. $\varphi_\alpha : V \to \mathbb{K}^n$, $\varphi_\alpha(u) = (u)_\alpha$. Zřejmě je φ_α bijekce.
- Má tyto vlastnosti:
  - $\forall u, w \in V : \ \varphi_\alpha(u + w) = \varphi_\alpha(u) + \varphi_\alpha(w)$
  - $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V : \ \ \varphi_\alpha(a \cdot u) = a \cdot \varphi_\alpha(u)$.
- Tedy φ_α nám reprezentuje vektorový prostor V jako $\mathbb{K}^n$.
- O vektorech ve V můžeme smýšlet jako o n-ticích. Což jsme již viděli, např. v příkladu o polynomech, kde jsme namísto s vektory pracovali s jejich souřadnicemi v bázi $(x^4, x^3, x^2, x, 1)$.
- Možná interpretace je, že neexistují jiné konečněrozměrné vektorové prostory než $\mathbb{K}^n$.

Skalární součin

Definice

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad reálnými čísly je bilineární symetrická forma $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ taková, že $\langle v, v\rangle \geq 0$ a je roven 0 pouze při $v = 0$.

- Termín „bilineární symetrická forma“ znamená:
  - $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
  - $\langle u + v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$
  - $\langle a \cdot u, v\rangle = a \cdot \langle u, v\rangle$
- My budeme pracovat s klasickým případem, kdy $V = \mathbb{R}^n$ a

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n\,.$$

- Zajímavější příklady jsou $V = F(\mathbb{R})$ a $\langle u, v\rangle = \int_0^1 u \cdot v\,\mathrm{d}t$.
- Předchozí lze uvažovat např. v $\mathbb{R}_3[x]$.

Ortogonální a ortonormální báze

Definice

- Velikost vektoru v se definuje jako

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}\,.$$

- Vektor v se nazývá normovaný, jestliže $\|v\| = 1$.
- Vektory $v, w \in V$ se nazývají ortogonální, jestliže $\langle v, w \rangle = 0$.
- Báze prostoru V složená z ortogonálních vektorů se nazývá ortogonální báze.
- Jsou-li bázové vektory navíc i normované, je to ortonormální báze.

Ortogonální báze – příklad

Příklad

Nalezněte ortogonální a ortonormální bázi podprostoru $P = \langle\{(1,1,1,1),(1,0,0,3)\}\rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ s obvyklým skalárním součinem.

- Rádi bychom zaměnili $u_2 = (1,0,0,3)$ nějakým vhodným vektorem v_2, který by byl kolmý k vektoru $v_1 = (1,1,1,1)$.
- Chceme $\langle\{v_1, v_2\}\rangle = P$, proto $v_2 = au_1 + bu_2 = av_1 + bu_2$.
- Zřejmě nemůže vyjít $b = 0$.
- Když má v_2 vlastnosti $\langle\{v_1, v_2\}\rangle = P$, $v_2 \perp v_1$ pak má tytéž vlastnosti i libovolný nenulový násobek v_2. Proto lze hledat v_2 ve tvaru $av_1 + bu_2$, kde $b = 1$.
- Z $\langle av_1 + u_2, v_1\rangle = 0$ dostaneme $a \cdot \langle v_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_1\rangle = 0$. Odtud $a = -\frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$. V našem případě $a = -1$.
- Tedy $v_2 = -v_1 + u_2 = (0,-1,-1,2)$.

Ortogonální báze – příklad – pokračování

Příklad

Nalezněte ortogonální a ortonormální bázi podprostoru $R = \langle\{(1,1,1,1),(1,0,0,3),(1,2,1,0)\}\rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

- Už víme $R = \langle\{v_1, v_2, u_3\}\rangle$ a zaměníme $u_3 = (1,2,1,0)$ vektorem $v_3 = u_3 + av_1 + bv_2$.
- Z $\langle u_3 + av_1 + bv_2, v_1\rangle = 0$ s využitím $v_2 \perp v_1$ dostaneme $\langle u_3, v_1\rangle + a \cdot \langle v_1, v_1\rangle = 0$.
- Podobně $\langle u_3, v_2\rangle + b \cdot \langle v_2, v_2\rangle = 0$.
- Zde konrétně vyjde $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, tzn. $v_3 = (1,2,1,0) + (-1,-1,-1,-1) + (0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1) = (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$.
- Na závěr normujeme, pokud chceme ortonormální bázi.

Existence ortonormální báze

Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces:

Věta

Nechť $(u_1, \dots, u_k)$ je lineárně nezávislá k-tice vektorů prostoru V se skalárním součinem. Pak existuje ortogonální systém vektorů $(v_1, \dots, v_k)$ takový, že $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Získáme je následující procedurou:

- *Z nezávislosti vektorů u_i plyne $u_1 \neq 0$. Položíme $v_1 = u_1$.*
- *Máme-li již vektory $v_1, \dots, v_\ell$ potřebných vlastností klademe*

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle u_{\ell+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Kdykoliv máme ortogonální bázi vektorového prostoru V, stačí vektory vynormovat a získáme bázi ortonormální.

Požadavky

Typické příklady:

- Určit bázi a dimenzi podprostoru. (užitečné dovednosti: výběr báze zezadané množiny generátorů, doplnění množiny vektorů na bázi).
- Průnik a součet podprostorů – opět báze a dimenze.
- Určit souřadnice vektoru v bázi.
- Najít v podprostoru ortogonální, resp. ortonormální bázi.