# Vlastnosti lineárních zobrazení – 7. přednáška

## Matice lineárních zobrazení, vlastní čísla a vektory

Ondřej Klíma

4. 4. 2013

# Osnova přednášky

- Definice lineárního zobrazení
- Matice lineárního zobrazení
- Matice přechodu
- Vlastní čísla a vektory

# Připomenutí definic a pojmů

**Definice**

Nechť $U$ a $V$ jsou vektorové prostory nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá lineární zobrazení (homomorfismus) jestliže platí:

1. $\forall u, v \in U \ : \ \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
2. $\forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in U \ : \ \varphi(a \cdot u) = a \cdot \varphi(u)$.

- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x, y)) = xy$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x, y)) = x^2 + 3y$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x, y)) = 3x + 1$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ – je lin. zob.

Zde $\varphi((x, y)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

# Příklady lineárních zobrazení

Následující zobrazení jsou lineární z $\mathbb{R}^2$ do sebe:

- Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L_a((x,y)) = a \cdot (x,y)$.
- Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L_r((x,y)) = (-y,x)$.
- Obecněji, rotace o úhel $\psi$ v kladném smyslu

$$L((x,y)) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Projekce vektoru na osu $y$, např. $L_p((x,y)) = (0,y)$.

$$(L_a)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, (L_r)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(L_p)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Matice lineárního zobrazení

- $U$ vektorový prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $dim U = n$,
  $V$ vektorový prostor s bází $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $dim V = m$.
- $\varphi : U \to V$ lineární zobrazení.
- Pro $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 \dots a_n u_n$ máme

$$\varphi(u) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \cdots + a_n \varphi(u_n).$$

- Tedy $\varphi : U \to V$ je zadáno hodnotami na vektorech z $\alpha$.
- Máme $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (u)_\alpha$ a tedy

$$(\varphi(u))_\beta^T = a_1 (\varphi(u_1))_\beta^T + a_2 (\varphi(u_2))_\beta^T + \cdots + a_n (\varphi(u_n))_\beta^T,$$

$$(\varphi(u))_\beta^T = \Big( (\varphi(u_1))_\beta, (\varphi(u_2))_\beta, \dots, (\varphi(u_n))_\beta \Big) \cdot (u)_\alpha^T.$$

- $(\varphi(u))_\beta^T = A \cdot (u)_\alpha^T$, kde $A$ matice $m \times n$.
- $A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$ — matice lineárního zobrazení (od $\alpha$ k $\beta$).

# Lineární zobrazení při reprezentaci prostorů

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"', "\simeq"] & V \arrow[d, "\beta", "\simeq"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "\overline{\varphi}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

## Příklad

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je pro dáno předpisem:

$$\varphi(u) = x_1\, v_1 + (x_3 - x_2)\, v_2,$$

kde $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v_1 = (2, -1)$, $v_2 = (1, -2)$. Určete matici lineárního zobrazení $\varphi$

a) v bázích $\epsilon_3 = (e_1, e_2, e_3)$ a $\epsilon_2 = (e'_1, e'_2)$ (standardní báze prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$),

b) v bázích $\epsilon_3 = (e_1, e_2, e_3)$ a $\beta = (v_1, v_2)$.

# Příklad – matice zobrazení – a)

- Definice: $\varphi(u) = x_1 \, v_1 + (x_3 - x_2) \, v_2$,, kde $u = (x_1, x_2, x_3), v_1 = (2, -1), v_2 = (1, -2)$.
- Z definice zobrazení

$$\varphi(u)^T = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Dle konstrukce matice zobrazení, potřebujeme určit $(\varphi(e_1))_{\epsilon_2} = \varphi(e_1) = v_1 = (2, -1)$, $(\varphi(e_2))_{\epsilon_2} = \varphi(e_2) = -v_2 = (-1, 2)$, $(\varphi(e_3))_{\epsilon_2} = \varphi(e_3) = v_2 = (1, -2)$.
- Při obou postupech jsme dostali

$$(\varphi)_{\epsilon_2, \epsilon_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

# Příklad – matice zobrazení – b)

Řešení části b):

- Podle druhého postupu potřebujeme určit
  $(\varphi(e_1))_\beta = (v_1)_\beta = (1,0)$,
  $(\varphi(e_2))_\beta = (-v_2)_\beta = (0,-1)$,
  $(\varphi(e_3))_\beta = (v_2)_\beta = (0,1)$.
- Dáme do souřadnice do sloupců

$$(\varphi)_{\beta,\epsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Příklad – matice zobrazení – polynomy

## Příklad

Uvažme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem $\varphi(g) = g' + x \cdot g$. Nalezněte matici zobrazení v obvyklých bazích $\alpha = (x^2, x, 1)$ a $\beta = (x^3, x^2, x, 1)$.

- Pro $g = ax^2 + bx + c$ máme $\varphi(g) = (2ax + b) + (ax^3 + bx^2 + cx) = ax^3 + bx^2 + (2a + c)x + b$.
- Tj. $(g)_\alpha = (a, b, c)$ a $(\varphi(g))_\beta = (a, b, 2a + c, b)$.
- Tzn. hledaná matice $A$ má vlastnost $A \cdot (a, b, c)^T = (a, b, 2a + c, b)^T$.
- Proto

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Příklad – matice zobrazení – polynomy – pokračování

- Zadání: $\varphi(g) = g' + x \cdot g$, $\alpha = (x^2, x, 1)$ a $\beta = (x^3, x^2, x, 1)$.

Druhý postup:

- $\varphi(x^2) = 2x + x^3$, tj. $(\varphi(x^2))_\beta = (1, 0, 2, 0)$.
- $\varphi(x) = 1 + x^2$, tj. $(\varphi(x))_\beta = (0, 1, 0, 1)$.
- $\varphi(1) = 0 + x$, tj. $(\varphi(x))_\beta = (0, 0, 1, 0)$.
- Opět

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Transformace souřadnic – matice přechodu

**Definice**

Buď dán vektorový prostor dimenze $n$ a jeho dvě báze $\alpha$ a $\beta$. Matice přechodu od báze $\alpha$ k bázi $\beta$ je taková matice $A$ , že $(u)_\beta = A \cdot (u)_\alpha$.

- Z předchozího víme, že $A = (\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$ a umíme ji spočítat.
- Matice přechodu od $\beta$ k $\alpha$ je matice $B$, pro kterou platí $A \cdot B = B \cdot A = E$. Tj. $B = (\mathrm{id})_{\alpha,\beta} = A^{-1}$ – umíme spočítat.
- Obecněji: $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ lineární zobrazení. Dále $\alpha$ báze $U$, $\beta$ báze $V$, $\gamma$ báze $W$. Pak

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \,.$$

# Skládání lineárních zobrazzení

Jako příklad skládání lineárních transformací $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uveďme složení dvou rotací. Jak jsme dříve ukázali, rotace o úhel $\delta$ v kladném smyslu je (ve standardní bázi) reprezentována maticí

$$R_\delta = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix},$$

podobně pro matici $R_\omega$ rotace o úhel $\omega$.
Jejich složení (v libovolném pořadí) zřejmě odpovídá rotaci o úhel $\delta + \omega$, proto

$$\begin{pmatrix} \cos(\delta+\omega) & -\sin(\delta+\omega) \\ \sin(\delta+\omega) & \cos(\delta+\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}.$$

Odtud mj. dostáváme platnost známých součtových vzorců pro goniometrické funkce.

# Příklad

- Definice: $\varphi(u) = x_1\, v_1 + (x_3 - x_2)\, v_2$, kde $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v_1 = (2, -1)$, $v_2 = (1, -2)$.
- Spočítali jsme $(\varphi)_{\epsilon_2,\epsilon_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
- Matice přechodu od báze $\beta = (v_1, v_2)$ k bázi $\epsilon_2$ je

$$(\mathrm{id})_{\epsilon_2,\beta} = ((v_1)_{\epsilon_2}^T, (v_2)_{\epsilon_2})^T = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Proto

$$(\mathrm{id})_{\beta,\epsilon_2} = (\mathrm{id})_{\epsilon_2,\beta}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(\varphi)_{\beta,\epsilon_3} = (\mathrm{id})_{\beta,\epsilon_2}(\varphi)_{\epsilon_2,\epsilon_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Vynásobením opět $(\varphi)_{\beta,\epsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

# Příklad — geometrické zobrazení

## Příklad

Napište matici zobrazení ve standardní bázi, které je transformací prostoru $\mathbb{R}^3$ a to symetrií podle přímky se směrovým vektorem $(1, 1, 1)$.

Výsledek:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

# Vlastní čísla a vektory

V předchozím příkladě byly užitečné vektory splňující rovnici $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ pro nějaké skaláry $\lambda$. (konkrétně $\lambda = 1, \lambda = -1$).

**Definice**

Skaláry $\lambda$ vyhovující rovnici $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme vlastní čísla (hodnoty) zobrazení $\varphi$ (eigenvalues), příslušné vektory $u$ pak vlastní vektory zobrazení $\varphi$ (eigenvectors).

### Příklad

Uvažujme matici $A$ a vektory $u$ a $v$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -u,$$
$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v.$$

Jsou tedy$\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$ vlastní hodnoty matice $A$ a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory $u$ (pro$\lambda_1 = -1$) a $v$ (pro $\lambda_2 = 2$).

# Vlastní čísla a vektory – jak na ně?

**Příklad**

Matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$ nemá vlastní čísla a vektory v prostoru $\mathbb{R}^2$. (V prostoru $\mathbb{C}^2$ vlastní čísla a vektory má.)

- Buď $\varphi : V \to V$ lineární zobrazení na vektorovém prostoru dimenze $n$ nad skaláry $\mathbb{K}$.
- Rovnost $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ zapsaná s využitím matice zobrazení:

$$A \cdot x - \lambda \cdot x = (A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0.$$

- Taková soustava rovnic má netriviální řešení $x \neq 0$ právě tehdy, když $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.
- $\det(A - \lambda \cdot E)$ je ve skutečnosti polynom stupně $n$ – hledáme jeho kořeny. (Příklad: $(-1-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 4\lambda + 13$ nemá reálné kořeny. )

# Charakteristický polynom

## Definice

Pro matici $A$ dimenze $n$ nad $\mathbb{K}$ nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ charakteristický polynom matice $A$. Kořeny tohoto polynomu jsou vlastní hodnoty matice $A$. Je-li $A$ matice zobrazení $\varphi : V \to V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také charakteristický polynom zobrazení $\varphi$.

Z definice vlastních čísel je zřejmé, že jejich výpočet nemůže záviset na volbě báze. Skutečně, jako přímý důsledek trasformačních vlastností a Cauchyovy věty pro výpočet determinantu součinu dostáváme jinou volbou souřadnic (podobnou) matici $A' = P^{-1}AP$ s invertibilní maticí $P$ a

$$|P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}||(A - \lambda E)||P| = |A - \lambda E|,$$

protože násobení skalárů je komutativní a $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

# Podprostor vlastních vektorů

Je-li $u$ vlastní vektor matice $A$ příslušející vlastní hodnotě $\lambda$, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A(a\,u) = a(Au) = a(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Podobně, jsou-li $u, v$ vlastní vektory matice $A$ příslušející vlastní hodnotě $\lambda$, potom je také jejich součet vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A(u+v) = (Au) + (Av) = (\lambda\,u) + (\lambda\,v) = \lambda\,(u+v).$$

Vlastní vektory příslušející téže vlastní hodnotě tedy tvoří (společně s nulovým vektorem) podprostor vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$. To také zdůvodňuje terminologii „vlastní prostor“.

# Podprostor vlastních vektorů – příklad

**Příklad**

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- $$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2.$$
- Proto je $\lambda_1 = 2$ (násobnosti $2$) jediná vlastní hodnota.
- Výpočet vlastního prostoru pro $\lambda_1 = 2$:
$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
- Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$ je $\langle (1, 0) \rangle$.

# Obecné poznatky

**Věta**

*Vlastní vektory lineárního zobrazení* $\varphi : V \to V$ *příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

**Věta**

*Jestliže existuje* $n$ *navzájem různých kořenů* $\lambda_i$ *charakteristického polynomu zobrazení* $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$, *pak existuje báze* $V$ *složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má* $\varphi$ *diagonální matici (s vlastními čísly na diagonále). Příslušnou bázi obdržíme řešením* $n$ *systémů homogenních lineárních rovnic o* $n$ *neznámých s maticemi* $(A - \lambda_i \cdot E)$, *kde* $A$ *je matice* $\varphi$.

# Obecné poznatky II

**Věta**

*Symetrické matice nad $\mathbb{R}$ mají všechna vlastní čísla reálná.*

**Věta**

*Pro ortognormální matici $A$ nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), tj. sloupce tvoří oronormální bázi, mají vlastní čísla absolutní hodnotu $1$.*

Pro ortognormální matici $A$ platí, že $A^{-1} = A^T$.

Odtud lze analyzovat geometrická zobrazení (shodnosti) v $\mathbb{R}^3$.

- Polynom stupně tři má vždy reálný kořen.
- Trojnásobný kořen $1$ — identita.
- Trojnásobný kořen $-1$ — středová souměrnost.
- Kořen $1$ a dvojnásobný kořen $-1$ — osová souměrnost.
- Kořen $-1$ a dvojnásobná $1$ — souměrnost podle roviny.
- Jednoduchý kořen $1$ a dva komplexně sdružené nereálné kořeny — otáčení kolem osy vlastního vektoru příslušnému vlastnímu číslu $1$, o argument komplexního vlastního čísla.
- Jednoduchý kořen $-1$ a dva komplexně sdružené nereálné kořeny — složení dvou předchozích zobrazení.

# Příklad na ortonormální matici

## Příklad

Ve standardní bázi je dána následující matice zobrazení. Určete o jaké zobrazení se jedná.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vlastní vektory: dvojnásobná $1$ a jednoduchá $-1$.
- Vlastní prostor pro $1$: rovina kolmá k $(1, 1, 1)$.
- Vlastní vektor pro $-1$: $(1, 1, 1)$.
- Závěr: souměrnost podle zmíněné roviny.

# Požadavky

- Určit matici lineárního zobrazení ve standardní bázi.
- Změna báze – matice přechodu.
- Výpočet vlastních čísel a vektorů.
- Identifikovat v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ geometrické zobrazení analýzou vlastních čísel a vektorů.