Lineární modely – 8. přednáška

Afinní geometrie

Ondřej Klíma

11. 4. 2013

Osnova přednášky

- Afinní (pod)prostory
- Parametrický a implicitní popis
- Soustavy rovnic – revize
- Průniky a další standardní příklady
- Afinní kombinace bodů
- Konvexní množiny

Geometrie ve vícerozměrném prostoru

- Cíl: geometrie v $\mathbb{R}^3$ (obecně $\mathbb{R}^n$).
- Potřebujeme kromě vektorů také body, tj. uvažujeme $(\mathcal{B}, V)$, kde $\mathcal{B}$ je množina bodů, V vektorový prostor.
- Navíc máme operaci „přičtení vektoru k bodu“: $+ : \mathcal{B} \times V \to \mathcal{B}$.
- Dále operaci „rozdíl bodů“: $- : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to V$, $(A, B) \mapsto B - A = \overrightarrow{AB}$.

Afinní prostory

Definice

Buď $V = \mathbb{R}^n$ vektorový prostor. Standardní afinní prostor $\mathcal{A}_n = \mathbb{R}^n$ je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operací, která bodu $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ přiřadí bod $A + v = (a_1 + v_1, \ldots, a_n + v_n) \in \mathcal{A}_n$.

Tato operace splňuje následující tři vlastnosti:

1. $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in \mathcal{A}_n$ a nulový vektor $0 \in V$,
2. $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, a body $A \in \mathcal{A}_n$,
3. pro každé dva body $A, B \in \mathcal{A}_n$ existuje právě jeden vektor $v \in V$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, nebo $\overrightarrow{AB}$.

Vektorový prostor V nazýváme zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}_n$.

Pozn.: Abychom předešli nejasnostem, tak oddělíme formálně množinu $\mathcal{A}_n$ a V tak, že body z $\mathcal{A}_n$ píšeme do hranatých závorek: $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathcal{A}_n$.

Afinní prostory – poznámky

- Obecně lze místo $\mathbb{R}^n$ vzít jakýkoli vektorový prostor.

  Pozn.: Pak nelze použít konvence s hranatými závorkami a musí se dávat větší pozor ve formálních detailech.

- Nebo ještě obecněji lze postupovat způsobem naznačeným na první straně: $(\mathcal{B}, V)$ ....

  Pozn.: Zde je pak opět potřeba zvýšené opatrnosti, protože stejný symbol $+$ používáme pro dvě různé operace: přičtení vektoru ze zaměření V k bodu v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$, ale také sčítání vektorů v zaměření V.

- Z definice standardního afinního prostoru okamžitě plyne pro libovolné body A, B, C v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$

$$A - A = 0 \in V$$
$$B - A = -(A - B)$$
$$(B - A) + (C - B) = (C - A).$$

Afinní souřadná soustava

Pokud zafixujeme jeden pevný bod $A_0 \in \mathcal{A}_n$ a pevnou bázi α ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Definice

Hovoříme o afinní soustavě souřadnic $(A_0; u_1, \ldots, u_n)$ zadané počátkem afinní souřadné soustavy A_0 a bazí zaměření α. Afinní souřadnice bodu A v soustavě $(A_0; \alpha)$ jsou souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi α zaměření V.

Afinní souřadnice bodu $A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ v soustavě $(A_0; u_1, \ldots, u_n)$ jsou $[x_1, \ldots, x_n]$.

Afinní podprostory

Definice

Neprázdná podmnožina $\mathcal{M}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ se zaměřením V se nazývá afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$, je-li podmnožina $W = \{B - A \in V \mid A, B \in \mathcal{M}\}$ vektorovým podprostorem prostoru V a pro libovolné $A \in \mathcal{M}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{M}$.

- Pro afinní podprostor $\mathcal{M}$ v afinním prostoru se zaměřením V značíme vektorový podprostor

$$Z(\mathcal{M}) = \{B - A \mid B, A \in \mathcal{M}\} \subseteq V$$

  a hovoříme o zaměření afinního podprostoru $\mathcal{M}$.
- Dimenzí afinního (pod)prostoru rozumíme dimenzi jeho zaměření.
- Afinní podprostor zapisujeme $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$.
- Průnik afinních podprostorů je afinní podprostor nebo $\emptyset$.

Parametrický popis

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ a $(u_1, \dots, u_k)$ je báze $Z(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{M} = \{A + t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme parametrický popis podprostoru $\mathcal{M}$.

Příklad

Parametricky vyjádřete rovinu $\rho : 2x + 3y - z + 1 = 0$ v $\mathcal{A}_3$.

- Řešení: $\rho = \{(x, y, 2x + 3y + 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  $= \{[0, 0, 1] + x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Všimněme si, že vektory tvořící bázi zaměření $(1, 0, 2)$ a $(0, 1, 3)$ jsou kolmé na vektor $(2, 3, -1)$ koeficientů v rovnici pro ρ. Tento vektor nazýváme normálový vektor roviny.
- Podobně to dopadá, když uvažujeme jednu rovnici v $\mathbb{R}^n$.

Příklad z přednášky o soustavách rovnic

Příklad

Soustava lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení: $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.
Jak lze určit dimenzi afinního prostoru řešení?

Hodnost matice

Definice

Buď dána matice A s n řádky a m sloupci, tj. každý z m sloupců je prvek $\mathbb{R}^n$ a každý z n řádků je prvek $\mathbb{R}^m$.

- Hodnost matice A je počet nenulových řádků po Gaussově eliminaci.
- Sloupcová hodnost matice A je dimenze podprostoru $\mathbb{R}^n$ generovaného sloupci.
- Řádková hodnost matice A je dimenze podprostoru $\mathbb{R}^m$ generovaného řádky.

- Pro libovolnou matici se všechny uvedené hodnosti rovnají.
- Soustava $A \cdot x^T = b$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice A je rovna hodnosti rozšířené matice $(A \mid b)$.
- Pokud má soustava $A \cdot x^T = b$ řešení, pak se jedná o afinní podprostor dimenze $m - k$, kde m je počet sloupců v matici A a k je hodnost této matice.

Od parametrického vyjádření k implicitnímu

- Každá soustava zadává tedy nějaký afinní podprostor.
- Platí to i naopak? Je libovolný afinní podprostor $\mathcal{A}_n$. řešením nějaké soustavy?

Příklad

Nalezněte nějakou soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení je $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

- Ano, vždy to jde. Hovoříme o implicitním vyjádření afinního podprostoru.
- Povšimněme si, že jeden afinní podprostor má více implicitních a více parametrických vyjádření.
- V případě nadrovin, tj. podprostorů dimenze $n - 1$, kde n je dimenze celého prostoru, stačí najít normálový vektor.

Od parametrického vyjádření k implicitnímu II

Věta

Nechť $(A_0; \alpha)$ je afinní souřadný systém v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Afinní podprostory dimenze k v $\mathcal{A}$, vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n-k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.

Průnik afinních podprostorů

Metoda výpočtu průniku afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ závisí na vyjádření prostorů. (Totožné s tím co jsem již dělali v geometrii v rovině.

- Oba implicitně: vytvoří se velká soustava.
- Jeden implicitně a druhý parametricky: dosazení.
- Oba parametricky: porovnáním praraparametrických vyjádření vznikne soustava.

Příklad

Parametricky vyjádřete průnik následujících rovin v $\mathcal{A}_3$:

$$\sigma : 2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{a} \quad \rho : x - 2y + 5 = 0.$$

Vyřešte samostatně.

Řešení: přímka $[-5, 0, -9] + t(2, 1, 7)$.

Standardní příklady na afinní podprostory I

Příklad

Najděte příčku přímek (úsečku, jejíž jeden koncový bod leží na jedné z přímek, druhý pak na druhé z nich)
$p: [1,1,1] + t(2,1,0), \quad q: [2,2,0] + t(1,1,1)$, takovou, že přímka jí určená prochází bodem $[1,0,0]$.

Hledaný bod $Q \in q$ najdeme jako průnik přímky q s rovinou $[1,1,1] + t(2,1,0) + s(0,1,1)$.
Jde o úsečku s krajními body $[5,5,3] \in q$, $[7/3, 5/3, 1] \in p$.

Příklad

Najděte příčku přímek $p: [1,0,0] + t(0,0,1)$
$q: [0,1,0] + t(1,0,1)$, takovou, že přímka jí určená prochází bodem $[0,1,1]$.

Nemá řešení.

Standardní příklady na afinní podprostory II

Příklad

Určete osu mimoběžek (příčku, která je kolmá k oběma zadaným přímkám)

$$\begin{aligned} p: &\quad [3,0,3] + (0,1,2)t \\ q: &\quad [0,-1,-2] + (1,2,3)t. \end{aligned}$$

Řešení: úsečka $([2,3,4],[3,1,5])$.

Příklad

Zjistěte, zda leží body $[0,2,1]$, $[-1,2,0]$, $[-2,5,2]$ a $[0,5,4]$ z $\mathcal{A}_3$ v jedné rovině.

Standardní příklady na afinní podprostory III

Libovolná dvojice zadaných bodů z afinního prostoru $\mathcal{A}_3$ určuje vektor (jeho souřadnice jsou dány po složkách rozdíly souřadnic daných dvou bodů). To, že dané čtyři body leží v rovině je ekvivalentní tomu, že jsou tři vektory dané jedním vybraným bodem a vždy jedním ze tří zbylých lineárně závislé. Vybereme např. bod $[0, 2, 1]$ (na výběru nezáleží), pak uvažujeme vektory $[-1, 2, 0] - [0, 2, 1] = (-1, 0, -1)$, $[-2, 5, 2] - [0, 2, 1] = (-2, 3, 1)$ a $[0, 5, 4] - [0, 2, 1] = (0, 3, 3)$. Vidíme, že součet dvojnásobku prvního vektoru s třetím vektorem je roven druhému vektoru. Vektory jsou tedy lineárně závislé. Dané body tedy leží v rovině.
Obecný postup: dáme vektory do matice a určíme eliminací, jakou má matice sloupcovou hodnost, tj. dimenzi.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Mějme podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

- Jsou si rovny, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{N})$.
- Jeden je podprostorem druhého, např. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$.
- Podprostory jsou rovnoběžné pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a platí buď $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
- Podprostory jsou různoběžné pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
- Podprostory jsou mimoběžné pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

Umíme počítat, neboť všechny podmínky umíme prověřit.

Afinní obal množiny

- Průnik libovolného systému afinních podprostorů je buď afinní podprostor nebo prázdná množina.
- Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v $\mathcal{A}$ generovaný neprázdnou množinou M je průnik všech afinníh podprostorů, které obsahují M.
- Hovoříme také o afinním obalu množiny bodů M v $\mathcal{A}$.
- Příklad: afinní obal dvou přímek $A + t \cdot u$ a $B + t \cdot v$ je $A + \langle \{u, v, \overrightarrow{AB}\} \rangle$.

Afinní kombinace bodů

- Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0 \dots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako
$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0) \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}\,.$$
- V $\mathcal{A}_n$ nebo v afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako
$$\langle A_0, \dots, A_k\rangle = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k \mid t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$
- Obecně výrazy $t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$, kde $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je afinní kombinace bodů.
- Říkáme, že body $A_0, \dots, A_k$ jsou v obecné poloze, jestliže generují k-rozměrný podprostor.

Úsečky a trojúhelníky

- Dle předchozího, přímka procházející body A a B je $\{tA + sB \mid t, s \in \mathbb{R}, t + s = 1\}$.
- Úsečka daná krajními body A a B je potom $\{tA + sB \mid t, s \in \mathbb{R}, t + s = 1, t \geq 0, s \geq 0\}$, tzn. $\{tA + sB \mid t, s \in [0, 1], t + s = 1\}$.
- Trojúhelník daný vrcholy A, B, C:
  - „Nekonečný rovnoběžník“: $A + s(B - A) + t(C - A)$, kde $s, t \geq 0$
  - Úsečka BC je dána podmínkou $s + t = 1$, a body trojúhelníka musí tedy splňovat $s + t \leq 1$.
  - Zavedením $r = 1 - s - t$ dostaneme množinu $\{rA + sB + tC \mid r, s, t \in \mathbb{R}, r + t + s = 1, r, s, t \geq 0\}$.

Simplexy

Definice

Nechť $A_0, \ldots, A_k$ je $k+1$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. Pak k-rozměrný simplex $\Delta = \Delta(A_0, \ldots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k \mid t_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je úsečka, dvourozměrný trojúhelník.

Nestačínám to. Chceme čtyřúhelníky a složitější prostorová tělesa. Příště.

Požadavky

- Přechod od implicitního popisu k parametrickému a obráceně
- Průnik afinních podprostorů
- Afinní obal množiny bodů.
- Nalezení afinního podprostoru daných vlastností.

Zde končí požadavky na 2. vnitrosemestrální test.

- Příklady na simplexy budou příště (kdy plynule navážeme).

Transformace souřadnic

Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic (A_0, α), (B_0, β) se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bazí zaměření. Transformační rovnice tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$

$$X = B_0 + x_1' v_1 + \cdots + x_n' v_n = B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Označme $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi β a $M = (a_{ij})$ buď matice přechodu od báze α k bázi β. Potom

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 + a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= y_n + a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n \end{aligned}$$

tj. maticově

$$x' = y + M \cdot x.$$