Lineární modely – 9. přednáška

Euklidovská geometrie

Ondřej Klíma

18. 4. 2013

Osnova přednášky

- Euklidovské prostory
- Velikost vektorů a vzdálenost podprostorů
- Odchylky podprostorů
- Objem

Euklidovské prostory

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definice

Standardní bodový euklidovský prostor $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y^T.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \alpha)$ s ortonormální bazí α.
Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|\overrightarrow{AB}\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.
Euklidovské podprostory v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Vzdálenost bodů

Pro body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ platí

- $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,
- $\rho(A, B) = 0$ právě, když $A = B$,
- $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$.

V každé kartézké souřadné soustavě $(A_0; \epsilon)$ mají body

$$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$.

Příklad

Určete vzdálenost bodu $A = [1, 0, 1]$ a roviny $\rho : [0, 0, 0] + t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1)$.

Vzdálenost bodu od roviny – příklad

Vzdálenost $A = [1, 0, 1]$ od $\rho : [0, 0, 0] + t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1)$.

- Základní idea: spustíme kolmici z bodu A na rovinu ρ.
- Formálně hovoříme o kolmé projekci vektoru $\overrightarrow{PA}$, zde $P = [0, 0, 0]$, do podprostoru zaměření roviny ρ, tj. $\langle\{v_1, v_2\}\rangle$, kde $v_1 = (1, 1, 0)$ a $v_2 = (0, 1, 1)$.
- Tzn. pro vektor $z = \overrightarrow{PA} = (1, 0, 1)$ hledáme vektor $z_P = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ tak, aby $z' = z - z_P$ byl kolmý k zaměření roviny ρ, tj. k oběma vektorům v_1, v_2:

$$0 = \langle z', v_1 \rangle = \langle z, v_1 \rangle - a \cdot \langle v_1, v_1 \rangle - b \langle v_2, v_1 \rangle \,,$$
$$0 = \langle z', v_2 \rangle = \langle z, v_2 \rangle - a \cdot \langle v_1, v_2 \rangle - b \langle v_2, v_2 \rangle \,.$$

- V našem příkladě dostaneme soustavu (pro a, b):

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = 1$$
$$1 \cdot a + 2 \cdot b = 1$$

- Řešení $a = b = \frac{1}{3}$, dává $z_P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ a dále $z' = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Vzdálenost A od roviny ρ je $\|z'\| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$.

Ortogonální doplněk

- Předchozí příklad šel také počítat tak, že bychom spočítali kolmou projekci z na přímku (jednodimenzionální vektorový podprostor) se směrovým vektorem $u = (1, -1, 1)$ což je vektor kolmý k rovině ρ.
- Obecně, když hledáme vzdálenost bodu od podprostoru, se postupuje stejně. Místo jednoho směrového vektoru u máme ale k dispozici více vektorů kolmých na podprostor.
- Buď U podprostor standardního euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, pak definujeme ortogonální doplněk jako

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U : u \perp v\}.$$

- Obvykle U dáno bází a $U^\perp$ se spočítá z matice.
- Platí $\dim U + \dim U^\perp = n$, neboť hodnost matice je $\dim U$.
- Je-li $(u_1, \dots, u_k)$ ortogonální báze U a $(u_{k+1}, \dots, u_n)$ ort. báze $U^\perp$, pak $(u_1, \dots, u_n)$ je ortogonální báze $\mathbb{R}^n$.
- Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené vektory $w \in U$ a $\overline{w} \in U^\perp$ tak, že $v = w + \overline{w}$.

Vzdálenost bodu od podprostoru

Věta

Je-li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{BA} = A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Důkaz:

- Vektor $\overrightarrow{BA}$ se jednoznačně rozkládá na $\overrightarrow{BA} = w + \overline{w}$, $w \in Z(\mathcal{Q})$, $\overline{w} \in Z(\mathcal{Q})^{\perp}$.
- Přitom $\overline{w}$ nezávisí na volbě $B \in \mathcal{Q}$.
- $P = A + (-\overline{w}) = B + w \in \mathcal{Q}$ a $\|A - B\|^2 = \|w\|^2 + \|\overline{w}\|^2 \geq \|\overline{w}\|^2 = \|A - P\|^2$.
- Odtud již vyplývá, že minima je skutečně dosaženo, a to pro bod P. Vypočtená vzdálenost je tedy skutečně $\|\overline{w}\|$.

Vzdálenost podprostorů

Věta

Pro podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$ existují bod $P \in \mathcal{P}$ a $Q \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $A \in \mathcal{P}$ a $B \in \mathcal{Q}$. Vzdálenost bodů Q a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{P} + \mathcal{Q})^{\perp}$ pro libovolné body $B \in \mathcal{Q}$ a $A \in \mathcal{P}$.

Pokud chceme dopočítat body $P \in \mathcal{P}$ a $Q \in \mathcal{Q}$ v nichž se vzdálenost realizuje, postupujeme takto:

- Přičteme vektor $\overline{w}$ (onen kolmý průmět vektoru $A - B$) k $\mathcal{Q}$, čímž dostaneme $\mathcal{Q}' = \{X + \overline{w} \mid X \in \mathcal{Q}\}$.
- Určíme průnik $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}'$ a nějaký bod $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}'$.
- Protože $\overline{w} = \overrightarrow{QP}$ dopočítáme $Q = P + (-\overline{w})$.

Příklad – vzdálenost přímek

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathcal{R}^3$

$$p: [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1]+s(-1,-2,1).$$

- Ortogonální doplněk je: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp}=\langle(8,-2,4)\rangle$; $v=(4,-1,2)$.
- Spojnicí přímek p,q je například úsečka AB, kde $A=[1,-1,0]\in p$, $B=[2,5,-1]\in q$.
- Promítneme tedy vektor $z=[1,-1,0]-[2,5,-1]=(-1,-6,1)$. Hledáme tudíž $z_P=a\cdot v$ tak, že $\langle z-av,v\rangle=0$.
- Proto $a=\frac{\langle z,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$ a pro vzdálenost přímek pak dostáváme:

$$\rho(p,q)=a\cdot\|v\|=\frac{|\langle(-1,-6,1),(4,-1,2)\rangle|}{\|(4,-1,2)\|}=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Příklad – vzdálenost podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost podprostorů v $\mathcal{R}^5$:

$$\sigma : [3, 3, 5, 4, 1] + a(0, 1, 0, 2, -1) + b(1, -1, 1, 0, -1)$$

$$p : [2 - 1, 2, 2, 3] + s(1, -1, 1, -1, 1).$$

$U = \langle(0, 1, 0, 2, -1), (1, -1, 1, 0, -1), (1, -1, 1, -1, 1)\rangle$
$U^{\perp} = \langle(1, 0, -1, 0, 0), (1, 3, 1, -2, -1)\rangle$

Odchylka

Platí $0 \leq \frac{|\langle u,v \rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definice

Odchylka $\varphi(u, v)$ vektorů $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq \pi.$$

- V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů skutečně platí $\cos \varphi = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}$.
- Ve vícerozměrných prostorech je odchylka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula).

Odchylka – obecná definice

Definice

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V. Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle) \mid 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Je ovšem nutné ukázat, že takové minimum skutečně vždy existuje.

Odchylka – obecná definice – pokračování

Definice

(3) Je-li $U_1 \subseteq U_2$ nebo $U_2 \subseteq U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2).

Odchylka přímky a podprostoru

Lemma

Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, U) = \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

- Navíc pokud α je odchylka v a $U^\perp$, pak $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$.
- Toho lze využít při výpočtu, například v případě kdy podprostor V je například nadrovinou.
- Výpočet odchylek v obecných dimenzích je spočitatelný pomocí výpočtu zkracování vlastních vektorů při dvou kolmých projekcí mezi prostory, viz texty k přednáškám.

Odchylka podprostorů – příklad

Příklad

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (ve standardním označení, tj. $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou stěny, AA' pak hrana). Určete odchylku vektorů AB' aAD'.

Uvažujme krychli o hraně 1 a umístěme ji v $\mathbb{R}^3$ tak, že bod A bude mít ve standardní bázi souřadnice $[0,0,0]$, bod B pak souřadnice $[1,0,0]$ a bod C souřadnice $[1,1,0]$. Potom má bod B' souřadnice $[1,0,1]$ a bod D' souřadnice $[0,1,1]$. Pro vyšetřované vektory tedy můžeme psát
$AB' = B' - A = [1,0,1] - [0,0,0] = (1,0,1)$,
$AD' = D' - A = [0,1,1] - [0,0,0] = (0,1,1)$. Podle definice odchylky φ těchto vektorů je pak

$$\cos(\varphi) = \frac{(1,0,1)\cdot(0,1,1)}{\|(1,0,1)\|\|(0,1,1)\|} = \frac{1}{2},$$

tedy$\varphi = 60^\circ$.

Odchylka podprostorů – příklad II

Příklad

Určete odchylku rovin

$$\begin{aligned} \sigma: &\quad [1,0,2] + (1,-1,1)t + (0,1,-2)s \\ \rho: &\quad [3,3,3] + (1,-2,0)t + (0,1,1)s \end{aligned}$$

Průsečnice má směrový vektor $(1,-1,1)$, kolmá rovina na ni má pak s danými rovinami průniky generované vektory $(1,0,-1)$ a $(0,1,1)$. Tyto jednorozměrné podprostory svírají úhel 60°.

Objem rovnoběžnostěnu

Podobně jako v rovině, lze objem počítat pomocí determinantu.

Příklad

Určete objem rovnoběžnostěnu daného vektory $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)$

Řešení

$$\left| \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \right|$$

- Znaménko determinantu má opět jistou geometrickou interpretaci související s tím, zda uvažovaná trojice má souhlasnou orinetaci jako báze.
- U čtyřstěnu musíme použít koeficient $\frac{1}{6}$.

Rovnoběžnostěn

Definice

Nechť $u_1, \ldots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1, \ldots, u_k) \subseteq \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \ldots, u_k) =$$

$$= \{A + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k \mid 0 \leq c_i \leq 1, i = 1, \ldots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \ldots, u_k$ nezávislé, hovoříme o k-rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \ldots, u_k) \subseteq \mathcal{A}_n$.

Tj. rovnoběžník v $\mathbb{R}^3$ je rovnoběžnostěn (dimenze 2).

Požadavky

Umět počítat:

- Vzdálenost bodu a podprostoru
- Vzdálenost přímek (osa mimoběžek)
- Projekci vektoru do podprostoru
- Ortogonální doplněk
- Odchylku dvou přímek
- Odchylku dvou rovin mající jednodimenzionální průnik zaměření
- Objem rovnoběžnostěnu