Úkolem bylo nalézt všechny komplexní kořeny polynomu:

$$f(x) = 9x^7 + 39x^6 + 76x^5 + 60x^4 - 20x^3 - 84x^2 - 64x - 16$$

Často se plete to, že např. kořen 1 není komplexní. Všechny množiny $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ jsou podmnožinami kompexních čísel a tedy úkol najít všechny komplexní kořeny znamená najít všechny kořeny. Nyní jak začít takový polynom rozkládat. Máte v podstatě dvě možnosti - hledat největší společný dělitel polynomu f a jeho derivace f', jenže při takto vysokých koeficientech a stupni 7 se jen těžko dopočítáte výsledku, jak asi poznali všichni, co touto cestou šli. Já osobně bych začal Hornerových schématem hledat racionální kořeny. Přitom nejprve musíme vůbec vědět, které kořeny zkoušet (jeden student např. úhádl kořen $1 + i$, což je machrovina - tedy za předpokladu, že jej od někoho neopsal). Racionální číslo $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, jsou nesoudělná, je kořenem polynomu, jestli a dělí jeho absolutní koeficient - v tomto případě 16, a b dělí jeho vedoucí koeficient, v tomto případě 9. Proto jedinými možnými kandidáty na kořeny jsou tyto:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{4}{9}, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{8}{9}, \pm\frac{16}{3}, \pm\frac{16}{9}$$

Ačkoli vypadá hrozivě představa, že bychom měli zkoušet všech těchto 30 možností, v praxi je situace vždy jednodušší. Hornerovo schéma (naučte se jej, je to otázka deseti minut strávených na wikipedii):

	9	39	76	60	-20	-84	-64	-16
1	9	48	124	184	164	80	16	0

Nyní využiju toho, že Hornerovo schéma mi původní polynom již podělilo faktorem $(x - 1)$ - to jsou ty hodnoty, které vyšly v posledním řádku:

$$f(x) = (x - 1)(9x^6 + 48x^5 + 124x^4 + 184x^3 + 164x^2 + 80x + 16)$$

Množina všech možných racionálních kořenů bohužel zůstala stejná (to se stává, když je kořen 1 nebo -1). Já už samozřejmě výsledek znám, tak se mi to počítá snadno, vy byste vyzkoušeli postupně možnosti 1 (kvůli násobnosti), -1, 2, -2, 4, -4, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$, než byste došli k:

	9	48	124	184	164	80	16
$-\frac{2}{3}$	9	42	96	120	84	24	0

Mám tedy zatím rozklad:

$$f(x) = (x - 1)(3x + 2)(3x^5 + 14x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 28x + 8)$$

Přičemž Hornerovo schéma mi celý polynom vydělil faktorem $(x + \frac{2}{3})$, já jsem ze zbytku vytknul trojku a roznásobil jí tento faktor. Dále si všimněte, že vydělením faktorem $(2x + 3)$ se nám absolutní koeficient vydělil 2 a vedoucí 3, proto se nám také změnily možné racionální kořeny zbývajícího polynomu:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$$

	3	14	32	40	28	8
$-\frac{2}{3}$	3	12	24	24	12	0

Máme tedy (výsledek opět dělím třemi a trojkou roznásobuji závorku $(x + 2/3)$):

$$f(x) = (x - 1)(3x + 2)^2(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4)$$

Nyní se nám množina racionálních kořenů omezila pouze na $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Pokud jsme tedy ještě některé z nich nevyloučili, uděláme tak nyní a zjistíme, že polynom $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ již žádné racionální kořeny nemá. Teprve teď doporučuji zvažovat metodu hledání dvojnásobných kořenů nebo metodu neurčitých koeficientů (obě jsou přibližně stejně náročné vzhledem k množství výpočtů). Oběma metodami dostaneme rozklad:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = (x^2 + 2x^2 + 2)^2$$

Nakonec rozkladem tohoto trojčlenu dostaneme dva dvojnásobné kořeny $-1 \pm i$.