Poznámky ke cvičením

Některé poznámky k proběhlým cvičením:

- Označme $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ množinu všech iracionálních čísel, tj. reálných čísel, které nelze vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Studujme strukturu $(\mathbb{I}, +)$, kde $+$ je klasické sčítání reálných čísel.

  1. Nejprve je třeba ověřit, zda je množina $\mathbb{I}$ prázdná. Pokud by totiž byla prázdná, dvojice $(\mathbb{I}, +)$ by formálně byla grupoid. Ukážeme, že $\sqrt{2}$ není racionální. Předpokládejme, že ano a že lze psát $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$ a bez úhony na obecnosti, že $(a, b) = 1$, tj. a a b jsou nesoudělná. Potom $2 = \frac{a^2}{b^2}$ a tedy $a^2 = 2b^2$. Odtud plyne, že $2 \mid a^2$ a protože 2 je prvočíslo, platí $2 \mid a$. Potom ale $4 \mid a^2$ a z rovnice $a^2 = 2b^2$ plyne, že $2 \mid b^2$ a tedy $2 \mid b$. Potom ale $(a, b) \geq 2$ a čísla a a b nejsou nesoudělná, což je spor s předpokladem. Platí tedy $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.
  2. Je-li $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, musí také $-\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, neboť pokud by nastalo $-\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$, potom $\sqrt{2} = \frac{-a}{b}$ a $\sqrt{2}$ by bylo racionální, což je spor s předchozím argumentem. Potom už stačí jen uvést, že $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{I}$, jestlikož 0 je zřejmě racionální číslo. Proto $(\mathbb{I}, +)$ nemůže být grupoid.

- Uvažme množinu $\mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R})$ všech reálných singulárních čtvercových matic řádu n a $\cdot$ klasické násobení matic. Matice se nazývá singulární, má-li nulový determinant. Studujme strukturu $(\mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R}), \cdot)$:

  1. Je grupoid. Plyne z Cauchyho věty:
  $$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$
  Pokud totiž $A, B \in \mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R})$, potom $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 0 \cdot 0 = 0$ a tedy $A \cdot B \in \mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R})$.
  2. Je pologrupa, násobení matic je asociativní (předpokládejme, že je obecně známé).
  3. Pro $n > 1$ není monoid, jelikož $|I_n| = 1$ a tedy $I_n \notin \mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R})$.
  4. Nemusím nyní uvádět, že tato struktura pro $n > 1$ není grupa, jelikož není monoid.
  5. Anihilujícím prvkem je nulová matice 0_n, platí totiž zřejmě $0_n \in \mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R})$ a $0_n \cdot A = 0_n = A \cdot 0_n$ pro libovolnou matici $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
  6. Pro $n > 1$ není komutativní. Protipříklad pro $n = 2$:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
  Přitom obě matice na levé straně mají nulový determinant. Protipříklady pro $n > 2$ jsou analogické.
  7. Pro $n = 1$ množina $\mathrm{GL}^0(n, \mathbb{R})$ splývá s množinou $\{0\}$ a dvojice $(\{0\}, \cdot)$ tvoří dokonce komutativní grupu s jednotkovým prvkem 0.

Úkoly

Charakterizujte následující struktury. O každé rozhodněte, zda jde o grupoid, pologrupu, monoid, grupu, a zda je daná struktura komutativní, v případě negativní odpovědi uveďte příslušné protipříklady. Popište, pokud existují, neutrální, anihilující a (v případě, že je daná struktura monoid) všechny invertibilní prvky těchto struktur.

- $(n\mathbb{Z}, +)$ pro dané $n \in \mathbb{N}$, kde $n\mathbb{Z} = \{nu \mid u \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}$ je množina všech celých čísel a $+$ je klasické sčítání. Můžete předpokládat, že asociativita a komutativita sčítání celých čísel je obecně známý fakt a nemusíte jej dokazovat.

- $(\mathcal{R}(A), \circ)$, kde A je libovolná množina, $\mathcal{R}(A)$ je množina všech binárních relací na množině A:
$$\mathcal{R}(A) = 2^{A \times A}$$
a $\circ : \mathcal{R}(A) \times \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$ je operace skládání relací definovaná předpisem pro $R, S \subseteq A \times A$:
$$R \circ S = \{(a, c) \in A \times A \mid \exists b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

- $(S^2, \times)$, $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ je množina všech vektorů s jednotkovou normou:
$$(x, y, z) \in S^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
a $\times$ je operace vektorového součinu, tj:
$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$
Označení S^2 znamená, že jde o tzv. dojrozměrnou sféru, čímž máme na mysli plášť koule.

- $(\mathbb{N}, \langle\ ,\ \rangle)$, $\mathbb{N}$ je množina kladných přirozených čísel a $\langle a, b\rangle$ je nejmenší společný násobek čísel a a b. Můžete vycházet z následující definice nejmenšího společného násobku (můžete si však zvolit kteroukoli jinou definici):
$$\langle a, b\rangle = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$$
kde $\cdot$ je klasické násobení přirozených čísel a $(\ ,\ )$ je operace největšího společného dělitele. U obou těchto operací můžete předpokládat asociativitu a komutativitu jako již známou věc, tj. nemusíte ji dokazovat.

- Speciálně pro Petra (ostatní neřešte). $(\mathbf{Set}, \times)$, **Set** je třída všech množin, $\times$ operace kartézského součinu dvou množin definovaný svou univerzální vlastností. Předpokládej, že pojem univerzální algebry relaxujeme vzhledem k libovolné třídě a axiomy zadaných struktur ověřujeme pouze až na izomorfizmus.