Poznámky ke cvičením

Některé poznámky k proběhlým cvičením:

- Mějme podmnožinu $H^* = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ukažme, že $(H^*, \cdot)$ je podgrupa $(\mathbb{R}^*, \cdot)$:

1. Uzavřenost na násobení. Pro $x, y \in H^*$ musíme ukázat $x \cdot y \in H^*$. Z definice množiny H^* mají x a y tvar:

$$x = a + b\sqrt{2} \quad \text{a} \quad y = c + d\sqrt{2}$$

pro nějaké $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Potom:

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$$

Protože $ac + 2bd \in \mathbb{Q}$ a $bc + ad \in \mathbb{Q}$, platí $(ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} \in H^*$.

2. Inverze. Pro $x \in H^*$, $x = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, platí:

$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{(a - b\sqrt{2})}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

Nejprve je třeba si uvědomit, že $a - b\sqrt{2} \neq 0$ pro žádná dvě racionální čísla $a, b \in \mathbb{Q}$, která nejsou současně rovna nule. Jinak bychom nemohli předchozí úpravu (rozšíření zlomku) korektně provést. Předpokládejme pro spor, že $a - b\sqrt{2} = 0$. Potom máme dva případy:

(a) Pokud $b \neq 0$, potom $a - b\sqrt{2} = 0$ implikuje $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, což je spor, neboť $\frac{a}{b}$ je racionální a $\sqrt{2}$ není.

(b) Pokud $a \neq 0$, potom $a - b\sqrt{2} = 0$ implikuje $\frac{2b}{a} = \sqrt{2}$, což je opět spor, neboť $\frac{2a}{b}$ je racionální, kdežto $\sqrt{2}$ není.

Potom jasně platí:

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2}, -\frac{b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$$

a tedy $x^{-1} \in H^*$.

Proto je $(H^*, \cdot)$ podgrupa $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

- Model domácí úlohy: Uvažme podgrupu $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Její tabulka:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Protože násobení neutrálním prvkem je zřejmé, můžete první řádek a první sloupec vynechat a uvést pouze tabulku:

$\cdot$	-1	i	$-i$
-1	1	$-i$	i
i	$-i$	-1	1
$-i$	i	1	-1

Řády prvků:

x	1	-1	i	$-i$
$o(x)$	1	2	4	4

neboť:

$$\begin{aligned} (-1)^2 &= 1 \Rightarrow o(-1) = 2 \\ i^2 &= -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \Rightarrow o(i) = 4 \\ (-i)^2 &= -1 \quad (-i)^3 = i \quad (-i)^4 = 1 \Rightarrow o(-i) = 4 \end{aligned}$$

Tato grupa je tedy cyklická, neboť obsahuje prvek řádu 4, dokonce má takové prvky dva, a sice i a $-i$. Systém podgrup:

$$\begin{tikzcd} \{1,-1,i,-i\} \arrow[d, dash] \\ \{1,-1\} \arrow[d, dash] \\ \{1\} \end{tikzcd}$$

To, že jde o podgrupy, je zřejmé (v úloze nemusí být argumentováno). Musíme však argumentovat, proč neexistují žádné další podgrupy. V tomto případě vše plyne z faktu, že tato grupa je cyklická. Podgrupy cyklických grup jsou v bijekci s děliteli velikosti této grupy, což jsou v tomto případě právě 1, 2 a 4.

Úkoly

Pro následující grupy určete:

1. Cayleyho tabulku této grupy.
2. Řád každého prvku.
3. Rozhodněte, zda je grupa cyklická. V případě kladné odpovědi uveďte alespoň jeden prvek, kterým je generována.
4. Systém všech podgrup.

Své řešení vždy doprovoďte výpočtem, který podporuje vaše tvrzení.

- $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ obsahuje:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

a sčítání je definováno po složkách, tj. $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$.

- $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot\,)$
- Grupa $(A_4, \circ) \leq (S_4, \circ)$ všech sudých permutací:

$$\begin{aligned} A_4 = \{&1,(1,2,3),(1,3,2),(1,2,4),(1,4,2),(2,3,4),(2,4,3),\\ &(1,3,4),(1,4,3),(1,2)\circ(3,4),(1,3)\circ(2,4),(1,4)\circ(2,3)\} \end{aligned}$$

Přičemž 1 označuje identickou permutaci.

- Grupa $(D_4, \circ)$ symetrií čtverce:

$$D_4 = \{1, R_{\frac{\pi}{2}}, R_\pi, R_{\frac{3\pi}{2}}, O_1, O_2, O_3, O_4\}$$

kde 1 reprezentuje identickou transformaci, R_α rotace o úhel α a O_i osovou symetrii postupně podle první a druhé diagonály, horizontální a vertikální symetrii.