

Poznámky ke cvičením

V některých mých skupinách jsme stihli a v jiných ne řešit kombinatorickou úlohu následujícího typu:

- Popište všechny homomorfizmy $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_6$. Homomorfizmus je plně určen tím, kam pošleme generátory \mathbb{Z}_4 . Protože je grupa \mathbb{Z}_4 cyklická, stačí popsat, co se děje s prvkem 1. Řád prvku $[1]_4$ v grupě \mathbb{Z}_4 je 4 a řád prvku $[\varphi(1)]_6$ v \mathbb{Z}_6 musí dělit 4. To nám značně omezuje možnosti, jak homomorfizmus zadat. Prvky, jejichž řád v \mathbb{Z}_6 dělí 4, jsou $[0]_6$ a $[3]_6$. Jediné možnosti máme $[1]_6 \mapsto [0]_6$ a $[1]_6 \mapsto [3]_6$. Proto dostáváme právě dva homomorfizmy:

x	0	1	2	3
$\varphi_1(x)$	0	0	0	0
$\varphi_2(x)$	0	3	0	3

Přičemž homomorfizmus φ_1 je určen přiřazením $[1]_4 \mapsto [0]_6$, neboť definiční vlastnost homomorfizmu nám určuje:

$$\varphi([u]_4) = \varphi(u \cdot [1]_4) = u \cdot \varphi([1]_4) = u \cdot 0 = 0$$

proto φ_1 přiřazuje každému $[u]_4 \in \mathbb{Z}_4$ prvek $[0]_6$. Homomorfizmus φ_2 je určen přiřazením $[1]_4 \mapsto [3]_6$, neboť opět z vlastnosti homomorfizmu:

$$\begin{aligned}\varphi([2]_4) &= \varphi(2 \cdot [1]_4) = 2 \cdot \varphi([1]_4) = 2 \cdot [3]_6 = [6]_6 = [0]_6 \\ \varphi([3]_4) &= \varphi(3 \cdot [1]_4) = 3 \cdot \varphi([1]_4) = 3 \cdot [3]_6 = [3]_6\end{aligned}$$

Ještě pro vysvětlení definiční vlastnost homomorfizmu $\varphi : G \rightarrow H$ nám implikuje pro každé $g \in G$ a $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(g^n) = \varphi(g \cdots g) = \varphi(g) \cdots \varphi(g) = [\varphi(g)]^n$$

tj. homomorfizmus zachovává mocniny prvků. Pak si stačí jen uvědomit, že mocnina v \mathbb{Z}_4 má tvar:

$$([u]_4)^n = [u]_4 + \dots + [u]_4 = n \cdot [u]_4 = [n \cdot u]_4$$

- Popište všechny homomorfizmy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$. V tomto případě je situace něco komplikovanější, neboť $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ není cyklická. Stačí ale pořád uvažovat jen generátory, zvolme třeba $([1]_2, [0]_2)$ a $([0]_2, [1]_2)$. Stejně tak bychom ale mohli začít dvojicemi generátorů $\{([1]_2, [0]_2), ([1]_2, [1]_2)\}$ nebo $\{([0]_2, [1]_2), ([1]_2, [1]_2)\}$. Každý z těchto prvků má řád 2 a můžeme je tedy zobrazit pouze na prvek $[0]_6$ nebo $[3]_6$. Dostáváme tedy následující homomorfizmy:

x	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
$\varphi_1(x)$	0	0	0	0
$\varphi_2(x)$	0	3	0	3
$\varphi_3(x)$	0	0	3	3
$\varphi_4(x)$	0	3	3	0

Příčemž homomorfismus φ_1 je určen přiřazením $([1]_2, [0]_2) \mapsto [0]_6$ a $([0]_2, [1]_2) \mapsto [0]_6$, což dopočítáme následujícím způsobem. Zřejmě $\varphi_1(([0]_2, [0]_2)) = [0]_6$, neboť každý homomorfismus zobrazuje neutrální prvek na neutrální prvek a zbývá dopočítat, jak se φ_1 vyhodnotí na prvku $([1]_2, [1]_2)$. Využijeme definiční vlastnosti homomorfizmu:

$$\begin{aligned}\varphi_1((([1]_2, [1]_2))) &= \varphi_1((([1]_2, [0]_2) + ([0]_2, [1]_2))) \\ &= \varphi_1((([1]_2, [0]_2))) + \varphi_1((([0]_2, [1]_2))) = [0]_6 + [0]_6 = [0]_6\end{aligned}$$

Homomorfismus φ_2 je určen přiřazením $([1]_2, [0]_2) \mapsto [3]_6$ a $([0]_2, [1]_2) \mapsto [0]_6$ a dopočítáme:

$$\begin{aligned}\varphi_2((([1]_2, [1]_2))) &= \varphi_2((([1]_2, [0]_2) + ([0]_2, [1]_2))) \\ &= \varphi_2((([1]_2, [0]_2))) + \varphi_2((([0]_2, [1]_2))) = [3]_6 + [0]_6 = [3]_6\end{aligned}$$

Podobně homomorfismus φ_3 je určen přiřazením $([1]_2, [0]_2) \mapsto [0]_6$ a $([0]_2, [1]_2) \mapsto [3]_6$ a homomorfismus φ_4 přiřazením $([1]_2, [0]_2) \mapsto [3]_6$ a $([0]_2, [1]_2) \mapsto [3]_6$.

Úkoly

U následujících předpisů rozhodněte, zda korektním způsobem zadává homomorfismus. V kladném případě rozhodněte, zda je injektivní nebo surjektivní, a popište jeho jádro a obraz. V případě negativní odpovědi vždy uvádějte konkrétní protipříklad.

- $\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}, \varphi([a]_4, [b]_3) = [a - b]_{12}$
- $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2, \varphi(a) = [|a|]_2$

Popište všechny homomorfizmy typu:

- $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$

Příčemž řešení nemusíte rozepisovat do takových podrobností jako v předchozích poznámkách. Napište tabulku všech homomorfizmů a ukažte, čím jsou jednotlivé homomorfizmy zadány. Rovněž můžete využívat konvence psát u místo $[u]_6$, pokud by nedošlo k nějakému nedorozumění.