Příklad 1. *Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením* $N(6\text{g}; 1{,}196\text{g}^2)$. *Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček.*

$$X_1 \sim N(6g; 1{,}196\, g^2)$$
$$\vdots$$
$$X_{16} \sim N(6g; 1{,}196\, g^2)$$

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 100\right)}$$

$X_1, \dots, X_n$ nezávislé, s týmž rozdělením! $N(\mu, \sigma^2)$

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \boxed{M \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

$$E(M) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$D(M) = D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\underbrace{\sum \underbrace{D(X_i)}_{\sigma^2}}_{n\cdot\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 100\right) = P\Big(\underbrace{\frac{\sum X_i}{16}}_{M} \le \frac{100}{16}\Big) =$$

$$= P\left(M \le \frac{100}{16}\right)$$

a) z elektr. tabulky: $= \Phi_{spec.}(6{,}25) \doteq 0{,}81975$

b) stat. tabulka:

$$= P\Big(\underbrace{\frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{N(0,1)} \le \frac{\frac{100}{16}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) = \Phi\left(\frac{\frac{100}{16}-6}{\sigma/\sqrt{16}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1/4}{\sigma/4}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{1{,}196}}\right)$$

$$\approx \Phi(0{,}9144) = 0{,}866\cdot\Phi(0{,}9) + 0{,}144\cdot\Phi(1{,}0)$$

interpolace „zkoušková" tabulka

$$\approx 82\%$$

Příklad 2. *Předpokládejme, že velká skupina studentů má ze zápočtové písemky ze statistiky bodové hodnoty normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Určete pravděpodobnost, že*

a) náhodně vybraný student bude mít výsledek lepší než 80 bodů,

b) průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude lepší než 80 bodů.

$X \dots$ bodový výsledek náh. studenta

$X \sim N(72; 9^2)$

a) $$P(X > 80) \underset{\text{normujeme}}{=} P\Big(\underbrace{\frac{X-72}{9}}_{\substack{U \\ N(0,1)}} > \frac{80-72}{9}\Big)$$

$$= P\left(U > \frac{8}{9}\right) = 1 - P\left(U \leq \frac{8}{9}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{8}{9}\right) = 1 - 0{,}813 \approx 0{,}187$$

b) $X_1, \dots, X_{10} \sim N(72, 9^2)$

$$M = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i \sim N\left(72, \frac{9^2}{10}\right)$$

$$P(M > 80) \underset{\text{normujeme}}{=} P\Big(\underbrace{\frac{M-72}{9/\sqrt{10}}}_{U \sim N(0,1)} > \frac{80-72}{9/\sqrt{10}}\Big)$$

$$= P\left(U > \frac{8\sqrt{10}}{9}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8\sqrt{10}}{9}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(2{,}8109) \approx 1 - 0{,}99744$$

$$\approx 0{,}0025$$

Typové úlohy:

$$\alpha = P(L \le G \le U)$$

pst $\in \langle 0,1 \rangle$ statistika

I. dáno L, G, U, určit α

II. dáno α; G; určit L, U (symetricky)

III. dáno α, L, U; určit „informaci o G"

typicky: určit potřebný počet pokusů n

Příklad 3. *Rychlost letadla byla určována v 5 zkouškách, jejichž aritmetický průměr byl $m = 870{,}3\,ms^{-1}$. Najděte 95% interval spolehlivosti pro μ víte-li, že měření rychlosti se řídí normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou $2{,}1\,ms^{-1}$.* $= \sigma$

$$R_1, \dots, R_5 \sim N(\mu, (2{,}1)^2)$$

$$m = \frac{R_1 + \dots + R_5}{5} \sim N(\mu, 2{,}1^2/5)$$

$$0{,}95 = P(D \leq \mu \leq H)$$

Víme, že $U = \dfrac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$0{,}95 = P(|U| \leq u_{0{,}975}) = P(|U| \leq 1{,}96)$$

$$= P\left(\left|\frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq 1{,}96\right) =$$

$$= P\left(-1{,}96 \leq \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1{,}96\right) =$$

$$= P\left(m - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(870{,}3 - \frac{1{,}96 \cdot 2{,}1}{\sqrt{5}} \leq \mu \leq 870{,}3 + \frac{1{,}96 \cdot 2{,}1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= P(870{,}3 - 1{,}87 \leq \mu \leq 870{,}3 + 1{,}87)$$

Příklad 4. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem*

a) 100 studentů, $= n$

b) 5 studentů

zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin M *s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin* S*. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte v obou případech 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.*

int. spolehlivosti pro μ jsou (viz nápověda)

$$\left(M - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\,;\ M + \frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$$= \left(20 - \frac{5}{\sqrt{100}}\cdot t_{0{,}975}(99)\,;\ 20 + \frac{5}{\sqrt{100}}\, t_{0{,}975}(99)\right)$$

$??$ $t_{0{,}975}(100) = 1{,}984$

$$= (19{,}008\,;\ 20{,}992)$$

b) $\left(20 - \frac{5}{\sqrt{5}}\cdot t_{0{,}975}(4)\,;\ 20 + \frac{5}{\sqrt{5}}\, t(4)\right)$

$\approx 2{,}7764$

$$= (13{,}79\,;\ 26{,}21)$$

Příklad 5. *Pevnost nosníků má normální rozdělení s variabilitou vyjádřenou směrodatnou odchylkou* $\boxed{\sigma = 120.}$ *Nová technologie výroby bude akceptována, jestliže zajistí variabilitu nejvýše* 100. zmatení

Rozhodněte, zda je možné na základě 16 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou rovnou ~~107~~,5 90 *s rizikem* $\underbrace{0{,}05}_{\alpha}$ *přijmout novou technologii.*

$$1-\alpha = P(\sigma \leq H) = P(\sigma^2 \leq H^2) =$$

$$= P\left(\frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{H^2}{(n-1)S^2}\right) = \text{nezápornost}$$

$$= P\left(\underline{\underline{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}} \geq \frac{(n-1)S^2}{H^2}\right) =$$

$$K \sim \chi^2(n-1)$$

$$= 1 - P\left(K \leq \frac{(n-1)S^2}{H^2}\right)$$

$$\alpha = P\left(K \leq \frac{(n-1)S^2}{H^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{(n-1)S^2}{H^2} = \chi^2_\alpha(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)} = \frac{15\cdot 90^2}{7{,}261}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H \approx 129}$$

b) Jaká by musela být naměřená výb. sm. odchylka, aby „nám to prošlo"

$[H \approx 69{,}5)$

Příklad 7. *Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1\,m$. Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše 1/4 metru při riziku 0,05.*

$n = ?$, $\alpha = 0{,}05$

náh. výběr z rozdělení $N(\mu, 1^2)$

int. spol. 0,05 pro μ je:

$$\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} ;\ M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Požadujeme, aby: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{4}$

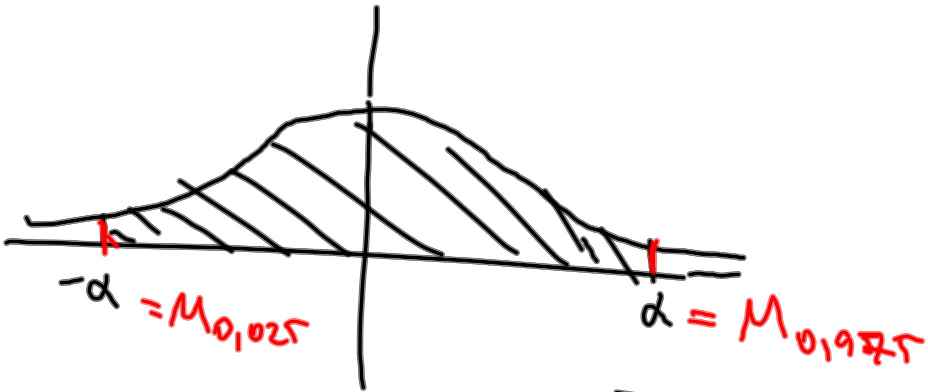
tj. $\sqrt{n} \geq 4\sigma\, u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$n \geq 16\sigma^2 \cdot \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2$

$n \geq 16 \cdot 1{,}96^2 \doteq 61{,}5$

Je třeba udělat aspoň 62 měření.

5 13-19:06



$$P(-a \le U \le a) = \Phi(a) - \Phi(-a) =$$

$$= \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$$

$$0{,}95 = 2\Phi(a) - 1 \Rightarrow \Phi(a) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$$

d.h. $a = u_{0,975}$