Příklad 1

$(\mathbb{R}, \odot)$, $a \odot b = (a+b)(1+a\cdot b)$

i) grupoid – ano

ii) $\odot$ je zřejmě komutativní

iii) pologrupa

$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$?

$L = (a\odot b) \odot c = [(a+b)(1+ab)] \odot c = [a + a^2b + b + ab^2] \odot c =$

$= (a+b+c+a^2b+ab^2)(1+ac+a^2bc+bc+ab^2c) =$

$= a+b+c+a^2b+ab^2+a^2c+abc+ac^2+a^3bc+a^2b^2c+$
$a^3bc+a^2b^2c+a^2bc^2+a^4b^2c+a^3b^3c+abc+b^2c+bc^2$
$+a^2b^2c+ab^3c+a^2b^2c+ab^3c+ab^2c^2+a^3b^3c+a^2b^4c$

$P = a\odot(b\odot c) = a \odot [(b+c)(1+bc)] = a \odot (b+c+b^2c+bc^2)$

$= (a+b+c+b^2c+bc^2)(1+ab+ac+ab^2c+abc^2)$

$= a+b+c+b^2c+bc^2+a^2b+ab^2+abc+ab^3c+ab^2c^2+$
$a^2c+abc+ac^2+ab^2c^2+abc^3 \ldots$

$L \neq P$ není pologrupa

Příklad 2

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \cdot)$ $\qquad (x,y,z)$

$$(x,y,z)\cdot(a,b,c) = (x+a,\ y+b,\ z+c+xb)$$

i) grupoid - ano

ii) $(a,b,c)\cdot(x,y,z) = (a+x,\ b+y,\ z+c+ay)$ $\Rightarrow$ není komutativní

iii) pologrupa

$$(x,y,z)\odot\big((a,b,c)\odot(u,v,w)\big) = (x,y,z)\odot(a+u,\ b+v,\ c+w+av) =$$

$$= (x+a+u,\ y+b+v,\ \underline{z}+\underline{c}+\underline{w}+\underline{av}+\underline{xb}+\underline{xv})$$

$$\big((x,y,z)\odot(a,b,c)\big)\odot(u,v,w) = (x+a,\ y+b,\ z+c+xb)\odot(u,v,w) =$$

$$= (x+a+u,\ y+b+v,\ \underline{z}+\underline{c}+\underline{w}+\underline{xb}+\underline{xv}+\underline{av})$$ ano

iv) neutrální prvek $\quad (e_1,e_2,e_3)$

$$(x,y,z)\odot(e_1,e_2,e_3) = (x+e_1,\ y+e_2,\ z+e_3+xe_2) = (x,y,z)$$

$x+e_1 = x \qquad y+e_2 = y \qquad z+e_3+xe_2 = z$

$e_1 = 0 \qquad e_2 = 0 \qquad e_3 = 0$

$$(0,0,0)\odot(x,y,z) = (0+x,\ 0+y,\ 0+z+0\cdot y) = (x,y,z)$$

$$(e_1,e_2,e_3) = (0,0,0)$$

v) inverzní prvek

$$(x,y,z)\odot(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,0,0)$$

$$(x+\bar{x},\ y+\bar{y},\ z+\bar{z}+x\bar{y}) = (0,0,0)$$

$x+\bar{x} = 0 \qquad y+\bar{y} = 0 \qquad z+\bar{z}+x\bar{y} = 0$

$\bar{x} = -x \qquad \bar{y} = -y \qquad z+\bar{z} - xy = 0$

$\bar{z} = xy - z$

$$(-x,-y,\ xy-z)\odot(x,y,z) = (-x+x,\ -y+y,\ xy-z+z-xy) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ nekomutativní grupa

Příklad 3

1. $(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, +)$
   - grupoid – ano
   - pologr – ano
   - neutr. prvek – $f(x) = 0$
   - komut – ano
   - $g(x) = -f(x)$

   KG

2. $(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, \cdot)$
   - grupoid – ano
   - pologr – ano
   - neutr. prvek – $f(x) = 1$
   - komut – ano
   - k $f(x)=0$ $\nexists$ inv.

3. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ)$
   - grupoid ano

   $[(f\circ g)\circ h](x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

   $[f\circ(g\circ h)](x) = f((g\circ h)(x)) = f(g(h(x)))$

   - neutr. – $f(x) = x$
   - komut – ne !
   - inverze ne

     $f(x) = 0$

4. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_{bij}, \circ)$ – grupa

Příklad 4

1. i) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)d_1$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad b_n = b_1 + (n-1)d_2$ $\Rightarrow a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(d_1+d_2)$
$\Rightarrow$ grupoid ano

ii) pologrupa - ano

iii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad e_n = 0$ je neutr. prvek, je aritm.

iv) komut

v) $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je opačná k $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, zřejmě aritm. $\Rightarrow$ KG

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = a_1 \cdot q_1^{n-1}$ $\quad a_n + b_n = a_1 q^{n-1} + b_1 \cdot q_2^{n-1}$ .... nemusí být geom.
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad b_n = b_1 \cdot q_2^{n-1}$

3. - opačná k rostoucí je klesající

4. - součet K je K
- asoc - ano
- neutr. $\{0\}_{n=1}^{\infty}$
- opačná ke K je K

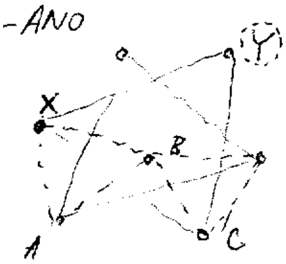
Příklad 5

zřetězení

- grupoid ano
- asoc. - ano
- neutr. - ne!

Příklad 6

- grupoid - ANO
- pologrupa



ne

Příklad 7

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	
c	c	a	b

i) $\Rightarrow$ a je neutr. prvek

ii) $b * b = (c * c) * b = c * (c * b) = c * a = c$

iii) $b * c = b * (b * b) = (b * b) * b = c * b = a$

Příklad 8

– regulární matice tvoří grupu

$$\left|\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 1 \Rightarrow M \subseteq Gl_2(\mathbb{R})$$

$A, B \in M$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B \in M$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \in M$$

Příklad 9

$(\mathbb{Q}, +)$

i) $H = \left\{ \frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$

i) $\frac{a}{2^k} + \frac{b}{2^l} = \frac{a \cdot 2^l + b 2^k}{2^{k+l}} \in M$

ii) $-\frac{a}{2^k} = \frac{-a}{2^k}$

ano

ii) $H = \{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}, (a,b)=1, a \leq b \}$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in H$

i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ × $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$!

iii) p_j $H = \{ \frac{a}{b} \mid (a,b)=1, a \leq b \quad p \nmid b$

iv) $H = \{ \frac{a}{b} \mid (a,b)=1, \square \nmid b \}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

$\square \nmid b \wedge \square \nmid d \Rightarrow \square \nmid \boxed{[b,d]}$ ANO

$-\frac{a}{b}$

DÚ – Co když to bude $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$?

Příklad 10

$\mathcal{B}(G)$ ... bijekce na G

i) zřejmé

ii) $\mathcal{A}(G) = \{ f_a : G \to G \mid f_a(x) = axa^{-1};\ a \in G \}$

$f_a, f_b \in G$

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ba)^{-1}$$

$$= f_{a\cdot b}(x)$$

$$f_{a^{-1}}(x) = a^{-1}xa$$

$$(f_{a^{-1}} \circ f_a)(x) = f_{a^{-1}}(axa^{-1}) = x$$