Democvičení
MB104 - jaro 2013

Příklad 1. Určete, jakou algebraickou strukturu tvoří $(\mathbb{R}, \odot)$, kde $a \odot b = (a+b)(1+a\cdot b)$.

Příklad 2. Na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definujme operaci $\odot$ vztahem

$$(x, y, z) \odot (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c + x \cdot b)$$

Dokažte, že daná struktura tvoří nekomutativní grupu.

Příklad 3. Rozhodněte, jaké algebraické struktury tvoří následující množiny s operacemi.

1. $(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, +)$
2. $(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, \cdot)$
3. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ)$
4. $(\{\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ je bijekce}\}, \circ)$

Příklad 4. Určete, jakou algebraickou strukturu tvoří

1. Množina všech aritmetických posloupností s operací sčítání
2. Množina všech geometrických posloupností s operací sčítání
3. Množina všech rostoucích posloupností s operací sčítání
4. Množina všech konvergentních posloupností s operací sčítání

Příklad 5. Na množině přirozených čísel definujme operaci $\circ$ vztahem $m \circ n = m.n$. Určete, jaké vlastnosti má daná operace.

Příklad 6. V rovině definujme operace $\triangle$ tak, že $A \triangle B = C$ tak, aby byl trojúhelník ABC rovnostranný (v kladném smyslu značení), přičemž $A \triangle A = A$ pro každý bod roviny. Jaké vlastnosti má takto definovaná operace?

Příklad 7. Doplňte tabulku tak, aby $(\{a, b, c\}, \circledast)$ byla grupa.

$\circledast$	a	b	c
a			
b			
c		a	b

Příklad 8. Nechť

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Určete, jakou strukturu tvoří M s operací násobení matic.

Příklad 9. Je dána grupa $G = (\mathbb{Q}, +)$. Rozhodněte, zda dané množiny tvoří podgrupu grupy G.

1. $H = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}$
2. $H = \{\frac{a}{b} \mid (a, b) = 1, a \leq b\}$
3. Nechť p je prvočíslo, $H = \{\frac{a}{b} \mid (a, b) = 1, a \leq b, p \nmid b\}$
4. $H = \{\frac{a}{b} \mid (a, b) = 1, \Box \nmid b\}$

Příklad 10. Nechť $(G, \odot)$ je grupa. Nechť $\mathcal{B}(G)$ označuje množinu všech bijekcí na G. Dále pro každé $a \in G$ definujme $f_a : G \to G$ vztahem $f_a(x) = a \odot x \odot a^{-1}$. Množinu všech takovýchto zobrazení označme $\mathcal{H}(G)$.

1. Dokažte, že $(\mathcal{B}(G), \circ)$ je grupa.
2. Dokažte, že $(\mathcal{H}(G), \circ)$ je podgrupa $(\mathcal{B}(G), \circ)$.