

Democvičení
M B104 - jaro 2013

Příklad 1. Uvažujme $H \subseteq Gl_3(\mathbb{R})$, kde

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Ukažte, že H je podgrupa grupy $Gl_3(\mathbb{R})$
2. Uvažujme $f : H \rightarrow \mathbb{Z}$ dané předpisem $f(A) = a - c$. Rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus grup.

Příklad 2. Necht' $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané vztahem $f((x, y)) = x$. Dokažte, že se jedná o homomorfismus a určete jádro a obraz.

Příklad 3. Rozhodněte, zda předpis $\varphi : (\mathbb{Z}_{15}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_5, +)$, $\varphi([a]_{15}) = ([2a]_3, [2a]_5)$, zadává zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus grup.

Příklad 4. Ukažte, že $(\mathbb{Z}_2^n, +) \cong (P(X), \div)$, kde X je n -prvková množina.

Příklad 5. Je dána grupa $(\mathbb{Z}_{81}^\times, \cdot)$.

1. Určete řád této grupy
2. Najděte prvky řádu 10.

Příklad 6. Faktorizujte grupu \mathbb{Z} podgrupou $k\mathbb{Z}$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

Příklad 7. Faktorizujte grupu \mathbb{R} podgrupou $k\mathbb{Z}$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

Příklad 8. Faktorizujte grupu \mathbb{R}^* podgrupou $\{-1, 1\}$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

Příklad 9. Faktorizujte grupu \mathbb{C}^* podgrupou $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

Příklad 10. Faktorizujte grupu $Gl_2(\mathbb{R})$ podgrupou $Sl_2(\mathbb{R})$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

Příklad 11. Určete všechny homomorfismy grup $\mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_{24}$