

Democvičení

M/B104 - jaro 2013

Příklad 1. Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } x = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $E(X)$, $E(2X + 5)$, $E(X^2)$, $D(X)$ a $D(2X + 1)$.

Příklad 2. Nekorelované náhodné veličiny X a Y mají rozptyly $D(X) = a$ a $D(Y) = 2$. Určete konstantu a , jestliže rozptyl náhodné veličiny $Z = 3Y - X$ je $D(Z) = 25$.

Příklad 3. Náhodná veličina X má na intervalu $(0, a)$ konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:

1. $E(2X + 3)$,
2. $E(3X^2 - 2X + 1)$,
3. $D(2X + 3)$,
4. $D(X^2 + 1)$,
5. momentovou vytvořující funkci $E(e^{tX})$ náhodné veličiny X .

Příklad 4. Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení (tj. pravděpodobnostní funkci $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$). Určete její momentovou vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl.

Příklad 5.

1. Dokažte Markovovu nerovnost

$$P[X > \lambda] < \frac{EX}{\lambda}.$$

2. Z Markovovy nerovnosti odvoďte Čebyševovu nerovnost

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

3. Počet aut vjíždějících do křižovatky v určitém časovém intervalu se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 120. Určete dolní odhad pravděpodobnosti, že v tomto intervalu vjede do křižovatky 100 až 140 aut.

Příklad 6. Nechť má X binomické rozdělení s parametry $n = 4, p = 2/3$. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = (X - 2)^2$ a nakreslete graf její distribuční funkce.

Příklad 7. Mějme náhodnou veličinu X hustoty $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x > 0$ (a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$.

Příklad 8. Délka výrobku v mm má $N(68, 3; 0, 04)$. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude mezi 68 a 69 mm ?