Matematika IV – demonstrační cvičení

11. května 2013

12. demonstrační cvičení

Příklad 1. *Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením* $N(6\text{g}; 1{,}196\text{g}^2)$. *Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček.*

[Odpověď:

$$P(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 100) = P(\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i \leq \frac{100}{16}) = P(M \leq \frac{100}{16}) = P\left(\frac{M-6}{\sigma/\sqrt{16}} \leq \frac{\frac{100}{16}-6}{\sigma/\sqrt{16}}\right) =$$

$$= P\left(U \leq \frac{1/4}{\sigma/4}\right) = P(U \leq 1/\sigma) = P(U \leq 0{,}9144) \approx 0{,}818.$$

]

Příklad 2. *Předpokládejme, že velká skupina studentů má ze zápočtové písemky ze statistiky bodové hodnoty normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Určete pravděpodobnost, že*

a) náhodně vybraný student bude mít výsledek lepší než 80 bodů,

b) průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude lepší než 80 bodů.

Příklad 3. *Rychlost letadla byla určována v 5 zkouškách, jejichž aritmetický průměr byl* $m = 870{,}3\,ms^{-1}$. *Najděte* 95% *interval spolehlivosti pro* μ *víte-li, že měření rychlosti se řídí normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou* $2{,}1\,ms^{-1}$.

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V, která je nestranným bodovým odhadem parametru θ.
2. Najdeme tzv. *pivotovou statistiku* W, která je transformací V se známým rozdělením a nezávisí na neznámé hodnotě θ.
3. Najdeme příslušné kvantily rozdělení statistiky W tak, že
$$P(w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$
4. Nerovnost $w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $T_L \leq \theta \leq T_U$.
5. Z daného výběru zjistíme konkrétní číselné realizace statistik T_L, T_U a dostaneme tak intervalový odhad požadované spolehlivosti $1-\alpha$.

Intervaly spolehlivosti pro parametry normálního rozdělení

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}, M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2})$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$

Příklad 4. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem*

a) 100 studentů,

b) 5 studentů

zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte v obou případech 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.

[Odpověď: a) (19,01;20,99); b) (13,79;26,20)]

Příklad 5. *Pevnost nosníků má normální rozdělení s variabilitou vyjádřenou směrodatnou odchylkou* $\sigma = 120$. *Nová technologie výroby bude akceptována, jestliže zajistí variabilitu nejvýše* 100.

Rozhodněte, zda je možné na základě 16 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou rovnou 107,5 s rizikem 0,05 přijmout novou technologii.

Příklad 6. *Spotřeba nového modelu auta byla testována 11 řidiči s výsledky 7,5; 7,8; 6,9; 8,2; 8,0; 7,5; 9,0; 7,6; 8,1; 7,9; 8,3. Rozhodněte, zda je možné se spolehlivostí 0,95 vyvrátit tvrzení výrobce o průměrné spotřebě 7,7 l/100 km.*

Příklad 7. *Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1\,m$. Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše 1/4 metru při riziku 0,05.*

[Odpověď: 62]

Příklad 8. *Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností* 0,1*. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností* 0,95 *alespoň 80 bezvadných konzerv. (Předpokládejte, že konzervy jsou vydávány náhodně).*

[Odpověď: Moivre-Laplace, $0{,}05 = \Phi(\frac{80-n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}})$*, odkud* $\frac{80-n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}} = -1{,}65$ *a vyřešením kvadratické rovnice dostaneme* $n \approx 94{,}23$*.]*

Příklad 9. *31 pacientů s rakovinou plic, léčených novým lékem, má průměrnou dobu přežití 28 měsíců se směrodatnou odchylkou 4 měsíce. Z předchozích studií je známo, že průměrné přežití pacientů bez podávání nového léku je 26 měsíců.*

a) Lze na základě těchto dat usoudit, že nový lék prodlužuje dobu přežití ($\alpha = 0{,}01$)?

b) Jak se změní závěr, pokud se významně zvětší počet pacientů, resp. rozptyl?

Intervaly spolehlivosti pro parametry 2 normálních rozdělení

$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{1-\alpha/2}$
společný rozptyl σ^2	$\left(\frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(m+n-2)}, \frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(m+n-2)} \right)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \right)$

Příklad 10. *Aktivní studenti chtěli dopravnímu podniku dokázat, že autobusy trpí většími výkyvy příjezdových dob na danou zastávku než tramvaje a provedli měření odchylek od jízdního řádu:*

autobus	*0*	*2*	*4*	*-3*	*2*	*-4*	*-3*	*0*	*0*	*5*
tramvaj	*4*	*6*	*3*	*0*	*-2*	*2*	*0*	*1*	*1*	*0*

Z tabulky lze snadno vypočítat, že $S_1^2 = 9{,}12$ *a* $S_2^2 = 5{,}39$. *Na hladině 0,05 testujte nulovou hypotézu, že autobus i tramvaj jsou stejně spolehlivé oproti alternativní hypotéze, že tramvaj je spolehlivější.*

Příklad 11. *Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru. Z první bylo odebráno 22 vzorků, z druhé 10 vzorků. Byly vypočteny následující hodnoty výběrových průměrů a rozptylů:* $M_1 = 34{,}23$, $M_2 = 35{,}73$, $S_1^2 = 1{,}76$, $S_2^2 = 1{,}81$. *Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozdělení* $N(\mu_1, \sigma^2)$, *resp.* $N(\mu_2, \sigma^2)$. *Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot* $\mu_1 - \mu_2$ *a vyslovte závěr na dané hladině spolehlivosti o podstatnosti rozdílu naměřených hodnot.*

[Odpověď: Dosadíme do vztahu $M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m + n - 2)$ *hodnoty* $M_1 - M_2 = -1{,}5$, $S_* = 1{,}3323$ *a dostaneme interval* $(-2{,}5377; -0{,}4623)$. *Do tohoto intervalu 0 nepatří, proto je rozdíl* $\mu_1 - \mu_2$ *statisticky významně různý od nuly.]*