

# Matematika IV – 1. přednáška

## Základy teorie grup

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

20. 2. 2013

# Obsah přednášky

- 1 Motivační úvod
- 2 Grupy
- 3 Grupy permutací
- 4 Grupy symetrií

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Rosický, *Algebra*, PŘF MU, 2002.
- Peter J. Cameron. *Introduction to algebra*, Oxford University Press, 2001, 295 s. (Dostupné v knihovně PŘF).
- P. Horák, Základy matematiky,  
[http://www.math.muni.cz/~horak/09p\\_zm\\_skripta.pdf](http://www.math.muni.cz/~horak/09p_zm_skripta.pdf)

Chceme abstraktně pracovat s objekty a se situacemi, ve kterých je možné rovnice

$$a \cdot x = b$$

vždy jednoznačně řešit (tak jako u lineárních rovnic jsou objekty  $a$  a  $b$  dány, zatímco  $x$  hledáme).

Jde o tzv. **teorii grup**. Všimněme si, že zatím nic nevíme o povaze objektů, ani co znamená ta “tečka” v rovnici.

- **grupoid**  $(G, \cdot)$  je množina  $G$  s binární operací  $\cdot$ .
- **pologrupa**  $(G, \cdot)$  je množina  $G$  s asociativní binární operací  $\cdot$ .
- **monoid**  $(G, \cdot)$  je pologrupa  $(G, \cdot)$  s jednotkovým (neutrálním) prvkem<sup>1</sup>
- **grupa**  $(G, \cdot)$  je monoid, ve kterém má každý prvek inverzi
- **komutativní grupa** (grupoid, pologrupa, monoid apod.), je taková grupa (grupoid, ...), že operace  $\cdot$  je komutativní. Často se v případě komutativních grup setkáte rovněž s pojmem **abelovská grupa**.

*Poznámka k nejednoznačnosti terminologie (multiplikativní vs. aditivní)*

---

<sup>1</sup>Raději než jednotka použijeme **jednotkový prvek** – důvod uvidíme později. Někdy se tomuto prvku rovněž říká jednička.

## Příliš stručná exkurze do univerzální algebry

Bystří studenti algebry si brzy povšimnou, že se mnohé pojmy a důkazy opakují pro různé situace. Skutečně se ukazuje, že základní pojmy a tvrzení je možné zavést a dokázat obecně pomocí univerzální algebry (příp. ještě obecněji v tzv. teorii kategorií). Pro informatiky, kteří mají za sebou funkcionální programování (příp. práci s objekty, metodami, šablonami apod.), by to možná mohl být přirozený postup, my však na to bohužel nemáme dostatek času.

Pro všechny *struktury* (pologrupy, grupy, okruhy, tělesa, vektorové prostory, svazy, moduly atd.) lze definovat několik základních pojmů analogickým způsobem:

- **podstruktury**
- **homomorfismy** mezi strukturami stejného typu
- **součiny** struktur téhož typu

## Příklad

- 1 Přirozená čísla (s nulou)  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , spolu s kteroukoliv z operací sčítání a násobení jsou asociativní a komutativní pologrupa s jednotkovým prvkem, neexistují v ní ale inverzní prvky.
- 2 Celá čísla  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  tvoří grupoid vůči kterékoliv z operací sčítání, odčítání, násobení. Jsou dokonce komutativní grupou vzhledem ke sčítání, jsou však jen komutativní pologrupou vůči násobení (neexistují inverze k prvkům  $a \neq \pm 1$ ). Operace odčítání není ani asociativní (např.  $(5 - 3) - 2 = 0 \neq 5 - (3 - 2) = 4$ ). Všimněte si také, že pro odečítání je nula pravý neutrální prvek, ne však levý. Dokonce v tomto případě levý neutrální prvek neexistuje.
- 3 Racionální čísla  $\mathbb{Q}$  jsou komutativní grupou vzhledem ke sčítání (celá čísla spolu se sčítáním jsou jejich podgrupou) a nenulová racionální čísla jsou kom. grupou vůči násobení.

## Příklad (pokračování)

- 1 Pro  $k \in \mathbb{N}$ , množina všech  $k$ -tých odmocnin z jedničky, tj. množina  $\{z \in \mathbb{C}; z^k = 1\}$  je konečná grupa vůči násobení komplexních čísel. Např. pro  $k = 2$  dostaneme grupu  $\{-1, 1\}$  se dvěma prvky, které jsou oba samy sobě inverzí, zatímco pro  $k = 4$  dostáváme grupu  $G = \{1, i, -1, -i\}$ .
- 2 Množina  $\text{Mat}_n$  všech čtvercových matic je (nekomutativní) pologrupa vzhledem k násobení matic a komutativní grupa vzhledem ke sčítání matic.
- 3 Množina všech lineárních zobrazení  $\text{Hom}(V, V)$  na vektorovém prostoru je pologrupa vzhledem ke skládání zobrazení a komutativní grupa vzhledem ke sčítání zobrazení.
- 4 V obou předchozích příkladech, podmnožina invertibilních objektů uvažované (multiplikativní) pologrupy tvoří grupu. V případě matic jde o tzv. grupu invertibilních (tj. regulárních) matic, ve druhém o grupu lineárních transformací vektorového prostoru (tj. invertibilních lineárních zobrazení).



# Grupy permutací

Zpravidla grupy a pologrupy potkáváme jako množiny zobrazení na pevně dané množině  $M$ , které jsou uzavřeny vůči skládání zobrazení. Často si ale tuto skutečnost přímo neuvědomujeme.

Na každé konečné množině  $M$ , s  $m = |M| \in \mathbb{N}$  prvky máme k dispozici  $m^m$  možných definic zobrazení (každý z  $m$  prvků můžeme zobrazit na kterýkoliv v  $M$ ) a všechna taková zobrazení umíme skládat.

Pokud chceme, aby existovala k zobrazení  $\alpha : M \rightarrow M$  jeho inverze  $\alpha^{-1}$ , musí být  $\alpha$  bijekcí. Složením dvou bijekcí vznikne opět bijekce a proto podmnožina  $S_m$  všech bijekcí na množině  $M$  o  $m$  prvcích je grupa. Říkáme jí **grupa permutací** na  $m$  prvcích.

Název **grupa permutací** přitom uvádí jinou souvislost, kdy místo bijekcí na konečné množině vnímáme permutace jako přerovnání rozlišitelných prvků. Potkávali jsme se s ní např. při studiu determinantů.

V grupě permutací  $S_3$  na číslech  $\{1, 2, 3\}$  si třeba označíme jednotlivá pořadí

$$a = (1, 2, 3), \quad b = (2, 3, 1), \quad c = (3, 1, 2), \\ d = (1, 3, 2), \quad e = (3, 2, 1), \quad f = (2, 1, 3).$$

Skládání našich permutací je pak zadáno tabulkou

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$b$	$b$	$c$	$a$	$f$	$d$	$e$
$c$	$c$	$a$	$b$	$e$	$f$	$d$
$d$	$d$	$e$	$f$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$f$	$d$	$c$	$a$	$b$
$f$	$f$	$d$	$e$	$b$	$c$	$a$

Všimněme si podstatného rozdílu mezi permutacemi  $a$ ,  $b$  a  $c$  a dalšími třemi. Ty první tři tvoří tzv. **cyklus** generovaný prvkem  $b$  nebo prvkem  $c$ :

$$b^2 = c, \quad b^3 = a, \quad c^2 = b, \quad c^3 = a$$

a samy o sobě jsou tyto tři prvky komutativní podgrupou. V ní  $a$  je neutrální prvek a  $b$  s  $c$  jsou vzájemně inverzní. Je tedy tato podgrupa *stejná* jako je grupa  $\mathbb{Z}_3$  zbytkových tříd celých čísel modulo 3, resp. jako grupa třetích odmocnin z jedničky z jednoho z předchozích příkladů.

Další tři prvky jsou samy sobě inverzí a každý z nich je tedy společně s neutrálním prvkem  $a$  podgrupou *stejnou* jako je  $\mathbb{Z}_2$ . Říkáme, že  $b$  a  $c$  jsou **prvky řádu 3**, zatímco prvky  $d$ ,  $e$  a  $f$  jsou řádu 2.

Obdobně se chovají všechny grupy permutací  $S_m$ .

Každá permutace  $\sigma$  rozkládá množinu  $M$  na disjunktní sjednocení maximálních invariantních podmnožin  $M_x$ , které dostaneme tak, že postupně vybíráme dosud nezpracované prvky  $x \in M$  a do třídy rozkladu  $M_x$  přidáváme všechny akce iterací  $\sigma^k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , dokud není  $\sigma^k(x) = x$ .

Každou permutaci tak dostáváme jako složení jednodušších permutací, tzv. cyklů, které se chovají jako identická permutace vně  $M_x$  a tak jako  $\sigma$  na  $M_x$ .

Pokud přitom očíslováme prvky v  $M_x$  jako pořadí  $(1, 2, \dots, |M_x|)$  tak aby  $i$  odpovídalo  $\sigma^i(x)$ , pak je naše permutace prostým posunutím o jednu pozici v cyklu (tj. poslední prvek je zobrazen zpátky na první). Odtud název **cyklus**. Zjevně přitom tyto cykly komutují, takže je jedno, v jakém pořadí z nich permutaci  $\sigma$  složíme.

Nejjednodušší cykly jsou jednoprvkové pevné body permutace  $\sigma$ . Dvoupvkové  $(x, \sigma(x))$ , kde  $\sigma(\sigma(x)) = x$  se nazývají **transpozice**.

Každý cyklus zjevně můžeme poskládat z permutací sousedních prvků (necháme *probublat* první prvek nakonec)  $\Rightarrow$  každou permutaci lze napsat jako složení transpozic.

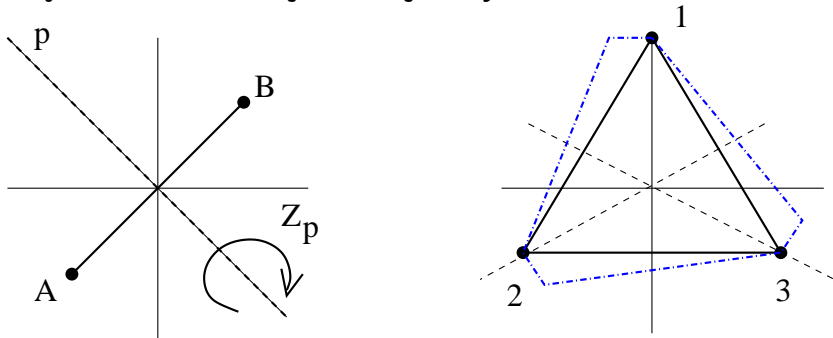
To, jestli potřebujeme sudý nebo lichý počet permutací, je na našich volbách nezávislé.

Máme proto dobře definováno zobrazení  $\text{sgn} : S_m \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ , tzv. **paritu** permutace. Dokázali jsme si znovu tvrzení, která jsme již využívali při studiu determinantů:

## Věta

*Každá permutace konečné množiny je složením cyklů. Cyklus délky  $\ell$  lze vyjádřit jako složení  $\ell - 1$  transpozic. Parita cyklu délky  $\ell$  je  $(-1)^{\ell-1}$ . Parita složení permutací je součinem parit jednotlivých z nich, tzn. že zobrazení  $\text{sgn}$  převádí složení permutací  $\sigma \circ \tau$  na součin  $\text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \tau$  v komutativní grupě  $\mathbb{Z}_2$ .*

Uvažme ohraničený rovinný obrazec, např. rovnostranný trojúhelník. Ptáme se, **jak moc jsou symetrické?**



Tzn. vůči kterým trasformacím (zachovávajícím velikost) jsou invariantní? Všechny symetrie pevně zvoleného útvaru budou vždy tvořit grupu (většinou pouze s jediným prvkem, identickým zobrazením).

# Symetrie rovnostranného trojúhelníku

Symetrií nacházíme několik: můžeme rotovat o  $\pi/3$  nebo můžeme zrcadlit vůči osám stran.

Abychom dostali celou grupu, musíme přidat všechna složení takovýchto transformací.

Víme z dřívějšíka, že složení dvou zrcadlení je vždy otočením.

Složení takových zrcadlení v opačném pořadí dá otočení o stejný úhel, ale s opačnou orientací. V našem případě tedy zrcadlení kolem dvou různých os vygenerují postupnou opakovanou aplikací všechny symetrie, kterých bude dohromady šest.



Jestliže si umístíme trojúhelník v souřadnicích jako na obrázku, bude našich šest transformací zadáno maticemi

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sestavením tabulky pro násobení, tak jak jsme ji udělali pro grupu permutací  $S_3$  obdržíme právě stejný výsledek.

# Dihedrální grupy

Obdobně umíme nacházet grupy symetrií s  $k$  různými rotacemi a  $k$  zrcadleními. Stačí si k tomu vzít pravidelný  $k$ -úhelník. Takové grupy symetrií se často označují jako grupy  $D_{2k}$  a říká se jim **dihedrální grupy** řádu  $2k$  (někdy též např  $D(k)$ ).

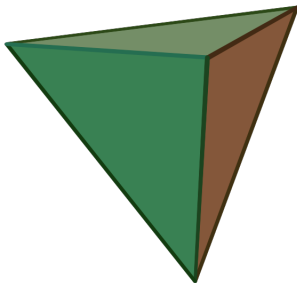
Tyto grupy jsou nekomutativní pro všechny  $k \geq 3$ .

# Cyklické grupy

Stejně tak lze snadno najít obrazce, které mají pouze rotační symetrie a jde tedy o komutativní grupy, které se v chemii značí jako  $C_k$ . Říkáme jim **cyklické grupy** řádu  $k$ . K tomu postačí např. uvažovat pravidelný mnohoúhelník, u kterého nesymetricky ale pořád stejně pozměníme chování hran.

## Příklad

- grupa symetrií čtverce  $D_8$  má 8 prvků (4 osové symetrie, 3 netriviální rotace a identita) a lze ji chápat jako podgrupu  $\Sigma_4$  (kam se zobrazují vrcholy?)
- grupa symetrií čtyřstěnu je celá  $\Sigma_4$ , pokud symetrie omezíme pouze na ty, které zachovávají orientaci, dostaneme podgrupu  $A_4 \leq \Sigma_4$  sudých permutací.



# Klasifikace symetrií

## Věta

*Nechť je  $M$  ohraničená množina v rovině  $\mathbb{R}^2$ . Pak grupa jejich symetrií je buď triviální nebo jedna z grup  $C_k$ ,  $D_{2k}$ , s  $k \geq 1$ .*