

# Matematika IV – 3. přednáška

## Homomorfismy a součiny grup

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

6. 3. 2013

# Obsah přednášky

1 Homomorfismy

2 Součiny

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Rosický, *Algebra*, PŘF MU, 2002.
- Peter J. Cameron. *Introduction to algebra*, Oxford University Press, 2001, 295 s. (Dostupné v knihovně PŘF).

# Homomorfismus

## Definice

Zobrazení  $f : (G, \cdot) \rightarrow (H, \circ)$  mezi dvěmi grupami  $(G, \cdot)$  a  $(H, \circ)$  se nazývá **homomorfismus grup**, jestliže respektuje násobení, tj. pro všechny prvky  $a, b \in G$  platí

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b).$$

Povšimněme si, že násobení vlevo je uvnitř grupy  $G$  předtím, než zobrazujeme, zatímco vpravo jde o násobení v  $H$  poté, co zobrazujeme.

Přímo z definice se snadno ověří následující vlastnosti homomorfismů:

### Věta

*Pro každý homomorfismus  $f : G \rightarrow H$  grup platí*

- 1 *obraz neutrálního prvku  $e_G \in G$  je neutrální prvek v  $H$*
- 2 *obraz inverze k prvku je inverzí obrazu, tj.  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .*
- 3 *obraz podgrupy  $K \leq G$  je podgrupa  $f(K) \leq H$ .*
- 4 *vzorem  $f^{-1}(K) \leq G$  podgrupy  $K \leq H$  je podgrupa.*
- 5 *je-li  $f$  zároveň bijekcí, pak i inverzní zobrazení  $f^{-1}$  je homomorfismus.*
- 6  *$f$  je injektivní zobrazení právě tehdy, když  $f^{-1}(e_H) = \{e_G\}$ .*

## Definice

Podgrupa, která je vzorem jednotkového prvku  $e \in H$  (tj.  $f^{-1}(\{e\})$ ) se nazývá **jádro** homomorfismu  $f$  a značíme ji  $\ker f$ . Bijektivní homomorfismus grup  $G$  a  $H$  nazýváme **izomorfismus** (a značíme  $G \cong H$ ).

## Poznámka

Podobně jako v teorii grafů jsou i v algebře izomorfní objekty nerozlišitelné.

Z předchozích tvrzení okamžitě vyplývá, že homomorfismus  $f : G \rightarrow H$  s triviálním jádrem je izomorfismem  $G$  na obraz  $f(G)$ .

## Cyklické grupy ještě jednou

Pro libovolný prvek  $a$  v grupě  $G$  existuje minimální podgrupa  $\{e = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \dots\}$ , která jej obsahuje<sup>1</sup>.

Je zjevné, že je tato podgrupa komutativní, a pokud je celá grupa  $G$  konečná, nutně musí jednou nastat případ  $a^k = e$ .

Nejmenší  $k$  s touto vlastností nazýváme **řád prvku**  $a$  v  $G$ . Grupa  $G$  je **cyklická**, je-li celé  $G$  generované nějakým svým prvkem  $a$  výše uvedeným způsobem. Zjistit pro konkrétní cyklickou grupu generátor je obecně obtížný problém. I při znalosti generátoru  $g \in G$  je ale obecně velkým problémem zjistit pro dané  $a \in G$  číslo  $k$ , pro které  $g^k = a$  (tzv. *problém diskrétního logaritmu* je základem mnoha kryptografických protokolů – ElGamal, Diffie-Hellman, DSA). Z definice přímo vyplývá, že každá cyklická grupa je izomorfní buď grupě celých čísel  $\mathbb{Z}$  (pokud je nekonečná) nebo některé grupě zbytkových tříd  $\mathbb{Z}_k$  (když je konečná).

---

<sup>1</sup>Co znamenají ty mocniny?

## Příklad

(1) Pro každou grupu permutací  $G = \Sigma_n$  jsme definovali zobrazení  $\text{sgn} : (\Sigma_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$  přiřazující permutaci její paritu (lichá=1, sudá=0). Jde o homomorfismus grup  $(\Sigma_n, \circ)$  a  $(\mathbb{Z}_2, +)$ . Jádrem tohoto homomorfismu jsou permutace se sudou paritou (tj. tzv. alterrující grupa  $A_n$ ).

(2) Grupa symetrií rovnostranného trojúhelníka  $D_6$  je izomorfní s grupou permutací  $\Sigma_3$ . Stačí zvolit realizaci  $\Sigma_3$  tak, že za množinu tří prvků pro permutace vezmeme vrcholy trojúhelníka a jednotlivým symetriím přiřadíme permutace těchto vrcholů, které vyvolají.

(3) Zobrazení  $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$  (nebo  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) je homomorfismus aditivní grupy reálných nebo komplexních čísel na multiplikativní grupu kladných reálných čísel, resp. na multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel.

V případě reálných čísel jde o izomorfismus (co je jeho inverzí?). Pro komplexní čísla dostáváme netriviální jádro  $\{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$ .



## Příklad

- (4) Determinant matice je zobrazením, které každé matici skalárů z  $\mathbb{K}$  přiřazuje nějaký skalár z  $\mathbb{K}$  (pracovali jsme s  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). Cauchyova věta o determinantu součinu čtvercových matic  $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$  je tvrzením, že pro grupu  $G = GL(n, \mathbb{K})$  invertibilních matic je  $\det : G \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$  multiplikativním homomorfismem grup.
- (5) Grupy zbytkových tříd  $(\mathbb{Z}_k, +)$  jsou izomorfní grupám komplexních  $k$ -tých odmocnin z jedničky, což jsou zároveň izomorfní obrazy konečných grup otočení v rovině o celé násobky úhlu  $\frac{2\pi}{k}$ .
- (6) Multiplikativní grupa invertibilních zbytkových tříd  $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot)$  je izomorfní aditivní grupě  $(\mathbb{Z}_{p-1}, +)$  (plyne z cykličnosti grupy).

## (Přímý) součin grup

### Definice

Pro každé dvě grupy  $(G, \cdot)$ ,  $(H, \circ)$  definujeme **součin grup**  $(G \times H, *)$  takto: Jako množina je  $G \times H$  skutečně (kartézský) součin, na kterém definujeme grupové násobení po složkách, tj.  $(a, x) * (b, y) = (a \cdot b, x \circ y)$ .

### Poznámka

Rozmyslete si, že jde o grupu a že součin komutativních grup je zase komutativní!

Zobrazení

$$p_G : G \times H \ni (a, x) \mapsto a \in G, \quad p_H : G \times H \ni (a, x) \mapsto x \in H$$

jsou surjektivní homomorfismy (tzv. **projekce**) s jádry

$$\ker p_G = \{(e_G, x); x \in H\} \quad \ker p_H = \{(a, e_H); a \in G\}.$$

## Příklad

(7) Grupa  $\mathbb{Z}_6$  je izomorfní součinu  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ .

Toto lze nahlédnout buď geometrickou úvahou (prostřednictvím grup symetrií v rovině) nebo přímou konstrukcí izomorfismu.

V aditivní notaci vypadá izomorfismus takto:

$$[0]_6 \mapsto ([0]_2, [0]_3), [1]_6 \mapsto ([1]_2, [2]_3)$$

$$[2]_6 \mapsto ([0]_2, [1]_3), [3]_6 \mapsto ([1]_2, [0]_3)$$

$$[4]_6 \mapsto ([0]_2, [2]_3), [5]_6 \mapsto ([1]_2, [1]_3)$$

(8) Dihedrální grupa  $D_8$  (tj. grupa symetrií čtverce,  $\langle r, s \mid r^4 = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$ ) **není** izomorfní součinu  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ , přestože mají stejný počet prvků ( $D_8$  není komutativní).

# Čínská zbytková věta (Chinese remainder theorem)

Předchozí příklad (část 7) je speciálním případem tzv. *Čínské zbytkové věty*.

## Věta

*Jsou-li  $k, m$  nesoudělná, pak*

$$(\mathbb{Z}_{km}, +) \cong (\mathbb{Z}_k, +) \times (\mathbb{Z}_m, +).$$

a obecněji

## Věta

*Jsou-li  $m_1, m_2, \dots, m_k$  po dvou nesoudělná, pak*

$$(\mathbb{Z}_{\prod m_i}, +) \cong (\mathbb{Z}_{m_1}, +) \times (\mathbb{Z}_{m_2}, +) \times \dots \times (\mathbb{Z}_{m_k}, +).$$

*Tento izomorfismus se často s výhodou využívá k reprezentaci velkých čísel při distribuovaných výpočtech pracujících s dělitelností, kdy na každém počítači stačí pracovat s jedním (relativně malým) modulem.*

## Důkaz CRT:

Sestrojíme požadovaný izomorfismus  $f$ . Označme  $m = \prod_i m_i$  a pro libovolné  $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$  položme  $f([a]_m) = ([a]_{m_1}, \dots, [a]_{m_k})$ . Snadno se ověří, že jde o injektivní homomorfismus (co je jádrem?). Zbývá dokázat, že jde i o surjekci, tedy, že libovolný prvek

$$([a_1]_{m_1}, \dots, [a_k]_{m_k}) \in (\mathbb{Z}_{m_1}, +) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{m_k}, +)$$

je obrazem nějakého  $a \in \mathbb{Z}_m$ . To je ale totéž jako najít  $a \in \mathbb{Z}$  takové, že  $a \equiv a_1 \pmod{m_1}, \dots, a \equiv a_k \pmod{m_k}$ , což se udělá malým (ale šikovným) trikem:<sup>2</sup> Pro libovolné  $1 \leq i \leq k$  položme  $n_i = m/m_i$  a protože  $(m_i, n_i) = 1$  (zde jsme využili *nesoudělnost po dvou*), najdeme podle Bezoutovy věty  $u_i$  a  $v_i$  tak, že  $u_i m_i + v_i n_i = 1$ , tj.  $v_i n_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ . Hledané  $a$  pak najdeme jako  $a = \sum_i a_i v_i n_i$ .

---

<sup>2</sup>A nešlo by to ještě šikovněji? Pokud nám stačí existence izomorfismu, tak stačí využít toho, že injektivní zobrazení mezi množinami o stejném počtu prvků je automaticky bijekcí.