Skupina A

Náhodný výběr (8 bodů):

Detailní hloubku moře lze pro hloubky v rozmezí mezi 1 km a 5 km měřit přístrojem, který má rozptyl $2500\,\mathrm{m}^2$. Určete:

(a) Minimální počet měření nutný k tomu, aby bylo dosaženo přesnosti 10 m se spolehlivostí 0,90. (3)

(b) Výběrový průměr a výběrový rozptyl z měření s výsledky: 1325, 1285, 1400, 1350, 1295, 1380. (2)

(c) Interval spolehlivosti 0,95 pro měřenou hloubku odvozený z výše uvedených měření. (3)

Polynomy (8 bodů):

(a) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a záporné. (4)

(b) Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 4, které mají (každý) trojnásobný kořen a jejichž největší společný dělitel je $h(x) = 9x^2 - 9x - 4$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost). (4)

Algebra (4 body) :

(a) Popište podgrupu grupy $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ generovanou $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$. (1)

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu pátého stupně nad $\mathbb{Q}$, který není ireducibilní a přitom nemá v $\mathbb{Q}$ kořen. (1)

(c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Q}$ stupně 2011. (1)

(d) Určete $[2011]^{-1}_{1492}$. (1)

Skupina B

Náhodný výběr (8 bodů):

Volejbalový trenér tvrdí, že volejbalistky mají větší objem plic než průměr ženské populace stejné věkové skupiny, který činí 3,4 litru.

(a) Během tréninkového kempu byla uskutečněna měření s následujícími výsledky:

$$3,4 \quad 3,6 \quad 3,8 \quad 3,3 \quad 3,4 \quad 3,5 \quad 3,7 \quad 3,6 \quad 3,7 \quad 3,4 \quad 3,6.$$

Se spolehlivostí 95% rozhodněte, zda je tvrzení trenéra opodstatněné – sestrojte příslušný jednostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení, z něhož pochází výběr volejbalistek a pro porovnání i 95% oboustranný interval spolehlivosti. (4)

(b) Z výše uvedeného výběru určete interval spolehlivosti 90% pro neznámý rozptyl σ^2 rozdělení, z něhož výběr pochází. (4)

Polynomy (8 bodů):

(a) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 4, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné. (4)

(b) Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 4, které mají (každý) trojnásobný kořen a jejichž největší společný dělitel je $h(x) = 16x^2 - 8x - 3$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost). (4)

Algebra (4 body) :

(a) Popište podgrupu $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ generovanou prvkem $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. (1)

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) ireducibilního polynomu pátého stupně nad $\mathbb{C}$. (1)

(c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu nad $\mathbb{Z}_3$ stupně 2011 s nenulovým absolutním členem, který má v $\mathbb{Z}_3$ právě 2009 kořenů (počítáno včetně násobnosti). (1)

(d) Určete $[1492]_{2011}^{-1}$. (1)