

Jméno:

Skupina: A

Místnost:

1. zkouška

0001

příklad

2

*učo**body*

0123456789

Polynomy (6 bodů):

Příklad 2

- (a) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu $f \in \mathbb{Z}[x]$, který není ireducibilní nad \mathbb{Z} a přitom nemá celočíselný kořen. (1)
- (b) Určete všechny komplexní kořeny (včetně násobnosti) polynomu $f(x) = 9x^7 + 39x^6 + 76x^5 + 60x^4 - 20x^3 - 84x^2 - 64x - 16$. (5)

Jméno:

Skupina: A

Místnost:

1. zkouška

0001

příklad

3

učo

body

0123456789

Grupy a jejich homomorfismy (6 bodů) :

Příklad 3

(a) Udejte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) nekonečné nekomutativní grupy. (1)

(b) Určete řád a inverzi prvku $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ v grupě invertibilních matic $GL(\mathbb{Z}_3)$. Dále vypočtěte A^{2014} . (2)

(c) Která z následujících zobrazení $(\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ jsou homomorfismy grup? Vše zdůvodňujte. (3)

1) $x \mapsto 3|x|$; 2) $x \mapsto 3+|x|$; 3) $x \mapsto |x|^3$; 4) $x \mapsto 1$; 5) $x \mapsto 1/|x|$.

Jméno:

Skupina: B

Místnost:

1. zkouška

0002

příklad

|

učo

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Rozhodněte, zda je směrodatná odchylka součtu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y rovna součtu směrodatných odchylek těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)
- (b) Odběratel provádí kontrolu jakosti namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10 \text{ mm}; 0,0737 \text{ mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (6)

Jméno:

Skupina: B

Místnost:

1. zkouška

0002

příklad

2

*učo**body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polynomy (6 bodů):

Příklad 2

- (a) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte neexistenci) nelineárního polynomu $f \in \mathbb{Z}[x]$, který má kořen v \mathbb{Q} a přitom nemá celočíselný kořen. (1)
- (b) Určete všechny komplexní kořeny polynomu $f(x) = 4x^7 + 12x^6 + 21x^5 + 24x^4 + x^3 - 2x^2 - 20x + 8$. (5)

Jméno:

Skupina: B

Místnost:

1. zkouška

0002

příklad

3

učo

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grupy a jejich homomorfismy (6 bodů) : Uvažte grupu Σ_7 všech permutací na sedmiprvkové množině (odpovědi zdůvodňujte!). **Příklad 3**

- (a) Určete všechny prvky podgrupy generované permutací $r = (1, 2, 3) \circ (4, 5, 6, 7)$ a vypočtěte r^{2013} . (2)
- (b) Uveďte příklad prvku Σ_7 , který nekomutuje s r a prvku s , pro nějž $s^5 = r^4$. (2)
- (c) Určete počet prvků pravého rozkladu Σ_7 podle podgrupy generované permutací r . (1)
- (d) Rozhodněte, je-li $\langle r \rangle$ normální podgrupa Σ_7 . (1)

Jméno:

Skupina: C

Místnost:

1. zkouška

0003

příklad

|

*učo**bodý*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Rozhodněte, zda je rozptyl součtu libovolné dvojice náhodných veličin X, Y roven součtu rozptylů těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)
- (b) Při 360 hodech šestibokou kostkou padla šestka 53 krát.
- Je možné tvrdit, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0,1$?
 - Určete hranici rizika (p -hodnotu) mezi zamítáním a nezamítáním. Vše zdůvodněte. (6)

Jméno:

Skupina: C

Místnost:

1. zkouška

0003

příklad

2

*učo**body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polynomy (6 bodů):

Příklad 2

- (a) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu $f \in \mathbb{Z}[x]$, který není ireducibilní nad \mathbb{Q} a přesto nemá racionální kořen. (1)
- (b) Určete všechny komplexní kořeny (včetně násobnosti) polynomu $f(x) = 9x^7 - 39x^6 + 76x^5 - 60x^4 - 20x^3 + 84x^2 - 64x + 16$. (5)

Jméno:

Skupina: C

Místnost:

1. zkouška

0003

příklad

3

učo

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grupy a jejich homomorfismy (6 bodů) :

Příklad 3

(a) Udejte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) nekonečné nekomutativní grupy. (1)

(b) Určete řád a inverzi prvku $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ v grupě invertibilních matic $GL(\mathbb{Z}_3)$. Dále vypočtete C^{2014} . (2)

(c) Která z následujících zobrazení $(\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ jsou homomorfismy grup? Vše zdůvodňujte. (3)

1) $x \mapsto 2|x|$; 2) $x \mapsto 2+|x|$; 3) $x \mapsto |x|^2$; 4) $x \mapsto -1$; 5) $x \mapsto 1/|x|$.

Jméno:

Skupina: D

Místnost:

1. zkouška

0004

příklad

|

*učo**bodý*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Rozhodněte, zda je rozptyl libovolné náhodné veličiny X nezáporné číslo. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)
- (b) Odběratel provádí kontrolu jakosti výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,1 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10 \text{ mm}; 0,0208 \text{ mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (6)

Jméno:

Skupina: D

Místnost:

1. zkouška

0004

příklad

2

*učo**body*

0123456789

Polynomy (6 bodů):

Příklad 2

- (a) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně alespoň 2, který není ireducibilní nad \mathbb{C} a nemá v \mathbb{C} kořen. (1)
- (b) Určete všechny komplexní kořeny polynomu
 $f(x) = 4x^7 - 12x^6 + 21x^5 - 24x^4 + x^3 + 2x^2 - 20x - 8.$ (5)

Jméno:

Skupina: D

Místnost:

1. zkouška

0004

příklad

3

*učo**bodů*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grupy a jejich homomorfismy (6 bodů) : Uvažte multiplikativní grupu **Příklad 3**
 G invertibilních zbytkových tříd modulo 81 a:

- (a) určete její řád, (1)
- (b) Vypočtěte $[14]_{81}^{-1}$. (2)
- (c) určete (nebo dokažte, že neexistují) prvek a řádu 9 a prvek b řádu 10 v G , (2)
- (d) určete řád podgrupy H generované některým prvkem z c) a počet prvků levého rozkladu G/H , (1)