jaro 2013

MB104 - 881 - skA

(1) a) $E(X\cdot Y) \overset{?}{=} E(X)\cdot E(Y)$

Obecně neplatí; platí, jsou-li X, Y nezávislé.

Dk: ① např. z toho, že $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$; kdyby tvrzení platilo, muselo by např. $E(X\cdot X) = E(X)\cdot E(X) \Rightarrow D(X) = 0$ a stačí zvolit X s nenulovým rozptylem – např. $X \sim Bi(n, \frac{1}{6})$ nebo $X \sim N(0,1)$.

② uvážením konkrétního protipříkladu, např. $X \sim Rs(0,1)$ a spočítat $E(X^2)$.

b) $n = 360$; $p = \frac{1}{6}$ $X_n \sim Bi(n,p)$, $np(1-p) = 50$ dost. velké

i) Moivre-Laplace: $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$0{,}9 = P\left(-u_{0,95} \le \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_{0,95}\right) = P\left(-1{,}65\cdot\sqrt{50} \le X_n - 60 \le 1{,}65\sqrt{50}\right)$$

Protože $67 - 60 = 7$ patří do intervalu spolehlivosti $1 - 0{,}1 = 0{,}9$; kostku lze považovat za ideální.

ii) p-hodnotu určíme ze vztahu $1-\alpha = P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{50} \le 7 \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{50})$, neboli $7 = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{50}$, odkud $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 1{,}0 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}84$, tj. $\alpha \approx 0{,}32$.

Závěr: ~~s rizikem~~ $\ge 32\%$ můžeme ~~prohlásit~~ prohlásit, že kostka není ideální.

(2) a) $f \in \mathbb{Z}[x]$ např. $(x^2+1)^2$ nebo $(2x+1)(3x+1)$

b) polynom má dvojnásobný kořen $-\frac{2}{3}$, $-1 \pm i$; jednoduchý kořen 4

(3) a) různé, např. $GL_2(\mathbb{R})$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ řád 3

$A^{-1} = A^2$; $A^{2014} = A^1\cdot(A^3)^{671} = A$

c) $f: (\mathbb{C}^{*}, \cdot) \to (\mathbb{R}^{+}, \cdot)$ $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{C}^{*}$

1) $x \mapsto 3|x|$ NE $3|x\cdot y| \neq 3|x|\cdot 3|y|$

2) $x \mapsto 3+|x|$ NE $3+|xy| \neq (3+|x|)(3+|y|)$

3) $x \mapsto |x|^3$ ANO $|xy|^3 = |x|^3\cdot|y|^3$

4) $x \mapsto 1$ ANO

5) $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ANO $\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|y|} = \frac{1}{|xy|}$

jaro 2013

MB103 – 381 – stB

(1) a) $\sqrt{D(X+Y)} \stackrel{?}{=} \sqrt{D(X)} + \sqrt{D(Y)}$

Neplatí; platí totiž $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, proto např. pro nezávislé $X, Y \sim N(0,1)$ je $\sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{2}$, ale $\sqrt{D(X)} = 1 = \sqrt{D(Y)}$

b) Máme ~~tedy~~ $X \sim N(10; 0{,}0437)$, dostaneme $P(S \le 0{,}2)$.

Přitom $P(S \le 0{,}2) = P(S^2 \le 0{,}04) = P\Big(\underbrace{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}_{\chi^2_{n-1}} \le (n-1)\frac{0{,}04}{\sigma^2}\Big) =$

$= F_{\chi^2_{n-1}}\Big((n-1)\frac{0{,}04}{\sigma^2}\Big) = F(10{,}85) \underset{\text{tab.}}{\approx} 0{,}05$

Pravděpodobnost, že bude dodávka přijata, je 5%

Testujeme 4 výrobky $\Rightarrow n = 4$: $F_{\chi^2_3}\Big(3 \cdot \frac{0{,}04}{\sigma^2}\Big) = F(1{,}628) \approx 0{,}415 \cdot 0{,}1 + 0{,}585 \cdot 0{,}5 \approx \underline{0{,}3}$

(Hledáme a takové, aby $a \cdot 0{,}584 + (1-a) \cdot 2{,}37 = 1{,}628$, odkud $a = 0{,}415$)

(2) a) např. $(3x+2)(x-1)$

b) kořeny -2, $+\frac{1}{2}$ (2×), $-\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ (2×)

(3) a) $r = (1,2,3) \circ (4,5,6,7)$

$\{ id, r, r^2 = (1,3,2)\circ(4,6)(5,7), r^3 = (4,7,6,5), r^4 = (1,2,3),$
$r^5 = (1,3,2)\circ(4,5,6,7), r^6 = (4,6)(7,5), r^7 = (1,2,3)(4,7,6,5)$
$r^8 = (1,3,2), r^9 = (4,5,6,7), r^{10} = (1,2,3)(4,6)(5,7), r^{11} = (1,3,2),(4,7,6,5) \}$

$r^{2013} = r^{2013 \% 12} = r^9 = (4,5,6,7)$

b) např. $(1,2)$ – ale i mnoho dalších.
$(1,2)\circ(1,2,3)(4,5,6,7) = (2,3)(4,5,6,7)$; $r\circ(1,2) = (1,3)(4,5,6,7)$

$s^5 = (1,2,3)$ splňuje např. $s = (1,3,2)$

c) $7!/12$

d) není např. $(1,4) \in \Sigma_7$: $(1,4)\circ r \circ (1,4)^{-1} = (1,5,6,7)(4,2,3) \notin \langle r \rangle$

Jaro 2013

MB104-3E1-85 C

(1) a) $D(x+y) \stackrel{?}{=} D(x)+D(y)$

obecně nikoliv, budou-li x, y nezávislé, pak rovnost platí.

Př: $D(X+X) = D(2\cdot X) = 4\cdot D(X) \neq D(X)+D(X)$

b) viz sk. A

(2) a) např. $(x^2+1)^2$

b) kořeny $\frac{2}{3}$ (2×), $1\pm i$ (2×), -1

(3) a) např. $GL_3(\mathbb{R})$

b) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ..., $C^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ řád 4

$C^{-1}=C^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C^{2014}=C^{4\cdot 503}\cdot C^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) 1) NE $\quad 2|xy| \neq 2|x|\cdot 2|y|$

2) NE $\quad 2+|xy| \neq (2+|x|)\cdot(2+|y|)$

3) ANO $\quad |xy|^2 = |x|^2\cdot|y|^2$

4) NE $\quad$ neutr. 1 nejde na 1

5) ANO $\quad \frac{1}{|xy|} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|y|}$

jaro 2013
MB104-881-S8D

① a) ano $D(X) \geq 0$ pro lib. X, neboť
$D(X) = E(X-EX)^2 \geq 0$ ~~[illegible]~~

b) $X \sim N(10;\ 0{,}0208)$, dostaneme $P(S \leq 0{,}1)$
Platí $P(S \leq 0{,}1) = P(S^2 \leq 0{,}01) = P\Big(\underbrace{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}_{\chi^2_{n-1}} \leq (n-1)\frac{0{,}01}{\sigma^2}\Big) =$

$= F_{\chi^2_{n-1}}\left((n-1)\frac{0{,}01}{\sigma^2}\right) = F(9{,}615) \simeq 0{,}025.$

Dodávka bude přijata s pravděpodobností cca 2,5%

Testujeme 4 výrobky $\Rightarrow n=4$: $F_{\chi^2_3}\left(3 \cdot \frac{0{,}01}{\sigma^2}\right) = F(1{,}442) =$ ~~[illegible]~~
$\doteq 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}3}$

(hledáme a tež, aby $a \cdot 0{,}584 + (1-a) \cdot 2{,}37 = 1{,}442$, tj. $a \doteq 0{,}5$)

Nyní je pst úspěchu cca 30%.

② a) Takový neexistuje; takové polynomy se rozkládají na lineární faktory, kt. mají kořen

b) kořeny 2, $-\frac{1}{2}$ (2×), $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (2×)

③ a) $\varphi(81) = \varphi(3^4) = 2 \cdot 3^3 = 54$

b) $14 \cdot x \equiv 1\ (81)$ $\quad [14]^{-1}_{81} = [29]_{81}$
$\underline{x \equiv 29\ (81)}$

c) prvek řádu 9 je např. -8, neboť 2 je řádu 54, 2^3 řádu $\frac{54}{3} = 18$;
prvek řádu 10 není. ($10 \nmid 54$)

d) prvek řádu 9 generuje podgrupu řádu 9; celý rozklad má $\frac{54}{9} = 6$ prvků