jaro 2013

M8103-B84-sk.A

(1)

a) $0{,}99 = P(X_n \geq 60)$, kde $X_n \sim Bi(n; 0{,}9)$.

Normujeme a aproximujeme (Moivre-Laplace) normálním rozdělením:

$$0{,}01 = P(X_n \leq 60) = P\left(\underbrace{\frac{X_n - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{60 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) \iff 0{,}01 = \Phi\left(\frac{60-n\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot\sqrt{n}}\right)$$

$$\iff \frac{n\cdot 0{,}9 - 60}{0{,}3\cdot\sqrt{n}} = 2{,}33.$$ Tj. $0{,}7\sqrt{n} = 0{,}9n - 60$. Položme $k = \sqrt{n}$

a řešme kvadratickou rovnici: $9k^2 - 7k - 600 = 0$, tj. $k = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 36\cdot 600}}{18}$

má kladné řešení $k \doteq 8{,}56$, tj. $n = k^2 \doteq 73{,}27$.

Závěr: musí vzít aspoň 74 konzerv.

b) $X_1 X_2 \sim N(0,1) \Rightarrow Y = 2 - X_1 + 3X_2 \sim N(2,10)$. $\quad \frac{Y-2}{\sqrt{10}} \sim N(0,1)$, $u_{0,95} = 1{,}65$

$E(X_1^2) = 1$

$E(Y) = 2$ $\quad E(X^2) = D(X) + E(X)^2$

$D(Y) = (-1)^2 + 3^2 = 10$ $\quad \frac{y_{0,95} - 2}{\sqrt{10}} = 1{,}65 \Rightarrow y_{0,95} \doteq 7{,}22$

$E(X_1\cdot Y) = E(2X_1) - E(X_1^2) + 3E(X_1 X_2) = 2\cdot 0 - E(X_1^2) + 3E(X_1)\cdot E(X_2) = -1$

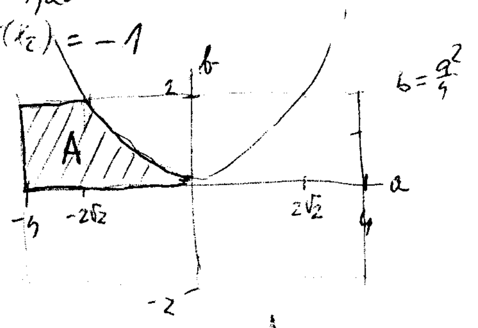
(2)

a) $x^2 + ax + b = 0$, $|a| \leq 4$, $|b| \leq 2$

reálné kořeny $\iff D = a^2 - 4b \geq 0 \iff a^2 \geq 4b$

kladné kořeny $x_1, x_2 \iff x_1 + x_2 = -a > 0$

$x_1 \cdot x_2 = b > 0$



(jinak: $\left.\begin{array}{l} -a + \sqrt{D} > 0 \\ -a - \sqrt{D} > 0 \end{array}\right\} \iff -a - \sqrt{D} > 0 \iff -a > \sqrt{D} \iff \begin{array}{l} a < 0 \ \wedge \\ a^2 > D = a^2 - 4b \end{array} \iff a < 0 \wedge b > 0$)

Oba kořeny jsou kladné reálné $\iff a < 0, b > 0, a^2 \geq 4b$

$$\mu(A) = 8 - \int_{-2\sqrt{2}}^{0} \left(2 - \frac{a^2}{4}\right) da = 8 - \left[2a - \frac{a^3}{12}\right]_{-2\sqrt{2}}^{0} = 8 - \left(4\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{12}\right) = 8 - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{8 - \frac{8}{3}\sqrt{2}}{32} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}}{4} = \frac{3 - \sqrt{2}}{12} \doteq 0{,}132$$

b) $x^4 + 4x^2 - x + 6 = 0$, $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$, nutně $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$ a $(x - x_1)(x - x_2) =$

$= x^2 + x + 3$. Dále

$(x^4 + 4x^2 - x + 6) : (x^2 + x + 3) = x^2 - x + 2$ s kořeny

$x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, všechny kořeny jsou jednoduché.

③

a) S_n je komutativní $\Leftrightarrow n \leq 2$

Pro $n \geq 3$ nekomutují! např. $(1,2)$ a $(1,3)$: $(1,2)\circ(1,3) = (1,3,2)$

$(1,3)\circ(1,2) = (1,2,3)$

b) $\langle (1,2)(4,7), (4,2)(7,3) \rangle = \{id, (4,2)(7,3), (1,2)(4,7), (1,2,7,3,4), (1,3,2,7,4), (1,3)(2,7),$
$(1,4,3,\cancel{7},2), (1,4)(2,3), (1,7)(3,4), (1,7,4,2,3)\}$

c) cyklus délky k má řád k $\Rightarrow$ určitě existují prvky řádu m pro $m \leq 7$.

Dále pro nezávislé cykly řádu k, l má jejich součin řád $[r,s]$.

Proto existují permutace řádu $10 = 2\cdot 5$, $12 = 3\cdot 4$ (další možné součiny $2\cdot 4, 3\cdot 5$ apod. nedají nezávislé cykly).

d) Jde o všechny cykly (a,b,c) nebo nezávislé součiny $(a,b,c)\cdot(d,e,f)$

Trojcyklů je $\binom{7}{3}\cdot 2 = 70$ (každá z $\binom{7}{3}$ trojic dá 2 cykly)

Dvojic trojcyklů je $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot 2$ ($\binom{7}{3}$ trojic, k nim $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}$ druhé trojice, přičemž ~~každ~~ každou dvojici trojic počítáme 2×; $2\cdot 2 = 4$ způsoby z nich uděláme cykly)

e) Neexistuje, levá strana je lichá permutace, zatímco pravá je sudá jaro 2013

MB104 – 8.4. – sk. B

① a) $X_n \sim Bi(n, \frac{1}{24})$

Chceme určit n tak, aby $0{,}95 = P(X_n > 3)$, tj. $0{,}05 = P(X_n \leq 3)$

Normujeme veličinu X_n: $\dfrac{X_n - n\cdot\frac{1}{24}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{23}{24}}} \sim N(0,1)$ [Moivre-Laplace]

$$0{,}05 = P\left(\frac{X_n - n\frac{1}{24}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{23}{24}}} \leq \frac{3 - n\cdot\frac{1}{24}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{23}{24}}}\right) = \Phi\left(\frac{72 - n}{\sqrt{23n}}\right)$$

Což je ekvivalentní tomu, že $u_{0{,}95} = 1{,}65 = \dfrac{n - 72}{\sqrt{23}\cdot\sqrt{n}}$ a dosadíme-li $k = \sqrt{n}$,

máme $k^2 - 7{,}913k - 72 = 0$, které má jediné kladné řešení $k \doteq 13{,}319$, a tedy $n \doteq 177{,}39$.

Závěr: musí vsadit alespoň $178 \cdot 200 = 35\,600$,–

b) $X_1, X_2 \sim N(0,1) \Rightarrow Y = -3 + 2X_1 - X_2 \sim N(-3, 5)$ $\qquad E(X_1^2) = D(X_1) + E(X_1)^2$

$E(Y) = -3$

$D(Y) = 5$ $\qquad \dfrac{y_{0{,}99} + 3}{\sqrt{5}} = 2{,}33 \Rightarrow y_{0{,}99} \doteq 2{,}21$

$$E(X_1 \cdot Y) = E(-3X_1) + 2E(X_1^2) - E(X_1 \cdot X_2) = -3\cdot 0 + 2\cdot 1 - 0\cdot 0 = 2$$

② a) $x^2 + ax + b = 0$, $|a| \leq 1$, $|b| \leq 2$

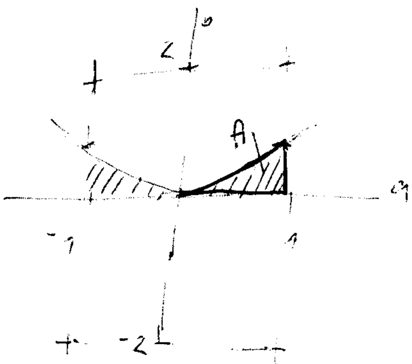
reálné kořeny $\iff D = a^2 - 4b \geq 0 \iff a^2 \geq 4b$

záporné kořeny $x_1, x_2 \iff x_1 + x_2 = -a < 0$

$x_1 \cdot x_2 = b > 0$

$\mu(\Omega) = 8$, $\mu(A) = \int_0^1 \frac{a^2}{4}\,da = \left[\frac{a^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{1/12}{8} = \dfrac{1}{96}$



b) $x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 16 = 0$, $x_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{15}}{2} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$

Tedy $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x + 4$ a $f(x) : (x^2 + x + 4) = x^2 - 2x + 4$

s kořeny $x_{3,4} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

③ a) Pro $n \leq 2$ je A_n triviálně komutativní, rovněž $|A_3| = 3$, tedy cyklická a komutativní.

Pro $n \geq 4$ např. $(1,2,3), (1,2,4) \in A_n$, přitom $(1,2,3)\circ(1,2,4) = (1,3)(2,4)$ $\#$

$(1,2,4)\circ(1,2,3) = (1,4)(2,3)$

b) $H = \langle (1,4)(2,7), (4,2)(7,3) \rangle \leq S_7$; $|H| = 10$, $H = \{id, (1,4)(2,7), (4,2)(7,3), (1,2)(3,4), (1,2,3,7,4), (1,3)(4,7), (1,3,4,2,7), (1,4,7,3,2), (1,7,2,4,3), (1,7)(2,3)\}$

c) Pro všechna $m \leq 7$ existuje, pro $m = 8$ nikoliv →

1	2	3	4
id	(1,2)(3,4)	(1,2,3)	(1,2,3,4)(5,6)

5	6	7
(1,2,3,4,5)	(1,2,3)(4,5)(6,7)	(1,2,3,4,5,6,7)

d) Jde o 5-cykly, těch je $\binom{7}{5}\cdot 4!$ (pro každou pětici $4!$ možností prvků na 2. až 5. místě)

e) Inverzí je $2 + 3 + 2 + 3 = 10$.