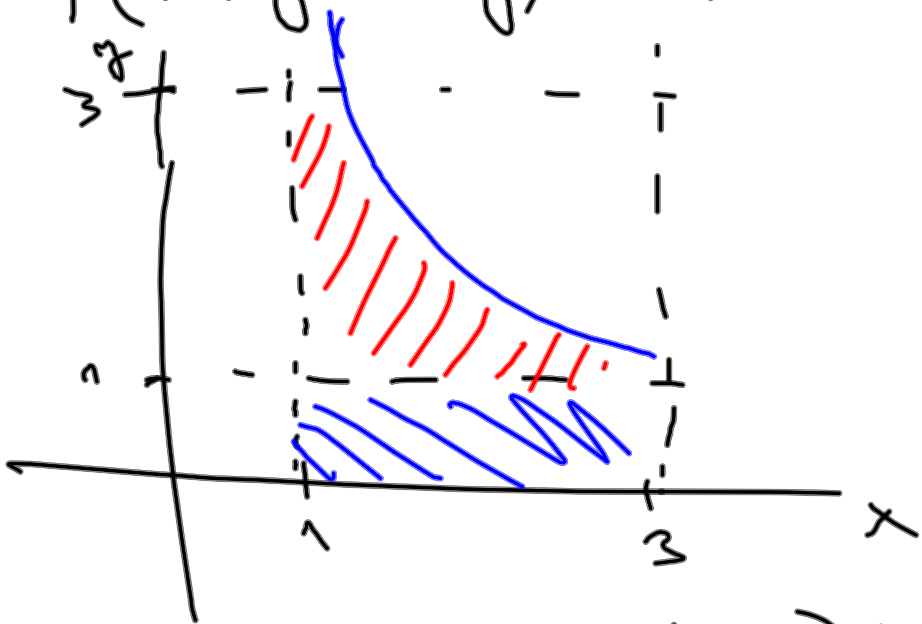
Př 1: $x, y \in \langle 1, 3 \rangle$

$P(x + y > x \cdot y) = ?$



$x + y > x \cdot y \Leftrightarrow y(1 - x) > -x$

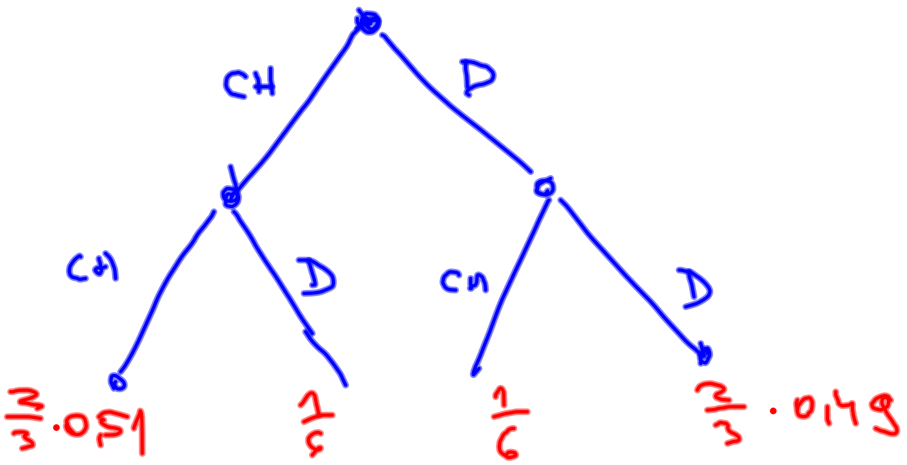
$y(x-1) < x$

$y < \frac{x}{x-1}$

$y < \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

3

Příklad 8. Při narození dvojčat je pravděpodobnost stejného pohlaví dvakrát větší než opačného. Je-li první dvojče chlapec, jaká je pravděpodobnost, že i druhé bude chlapec? (Celkově pravděpodobnost narození chlapce je 0,51).



$\frac{2}{3}\,0{,}51$ CH, CH
$\frac{2}{3}\,0{,}49$ D, D $\Big\}\ \frac{2}{3}$

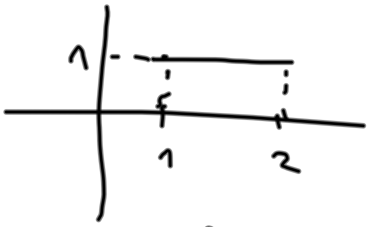
CH, D $\frac{1}{2}$

$$P(CH2\,|\,CH1) = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}51}{\frac{2}{3}\cdot 0{,}51 + \frac{1}{6}}$$

5 17-12:26

3 $X \sim Rs(1,2)$

$Y = \frac{1}{X}$



$F_X(t) = \int_1^t 1\,dx = (t-1)$

hustota $f_X(t) = 1$ pro $t \in \langle 1,2 \rangle$, jinak 0.

$F_X(t) = P(X<t) = P\left(\frac{1}{X} > \frac{1}{t}\right)$

$= P\left(Y > \frac{1}{t}\right) = 1 - P\left(Y \le \frac{1}{t}\right)$

$= 1 - F_Y\left(\frac{1}{t}\right)$

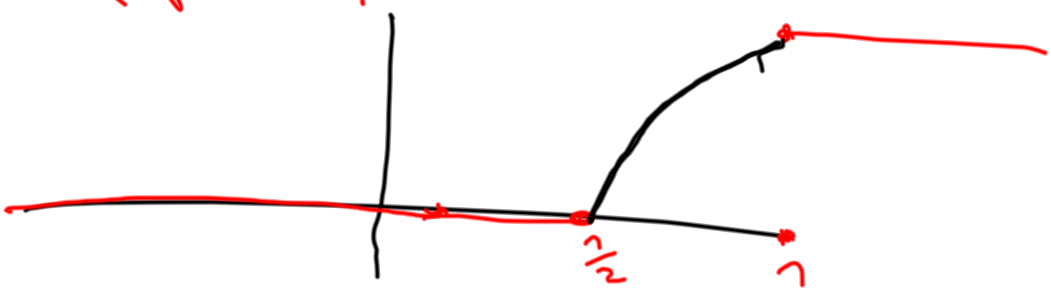
$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \left(\frac{1}{y} - 1\right) =$

$y \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ např. $F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$

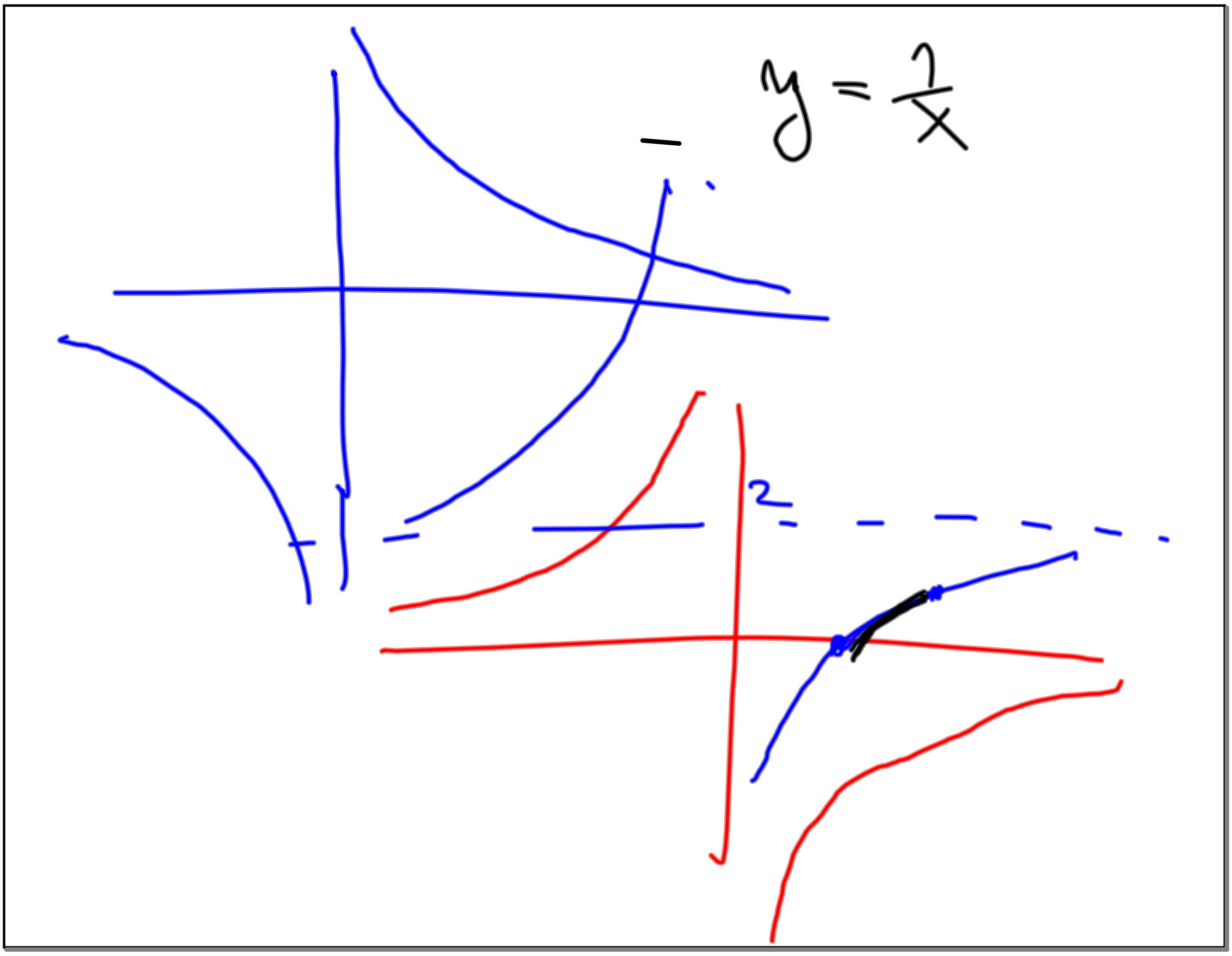
$F_Y(1) = 1 - 0 = 1$

$F_Y(y) = 1 - \left(\frac{1}{y} - 1\right) = 2 - \frac{1}{y}$. $y \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$

$F_Y(y) = 0$ pro $y < \frac{1}{2}$, $F_Y(y) = 1$ $y > 1$.



5 17-12:36


$y = \frac{2}{x}$
2

Balíček želatinových bonbónů obsahuje 10 žlutých medvídků, 5 červených delfínů a 15 žlutých delfínů. Náhodně vybereme dva bonbóny. Náhodná veličina X nechť nám udává počet vytažených žlutých bonbónů, náhodná veličiny Y nechť nám udává počet delfínů, které jsme vytáhli.

Příklad 3
15 bodů

12

1. Určete sdruženou i obě marginální pravděpodobnostní funkce.
2. Určete sdruženou i obě marginální distribuční funkce.
3. Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y stochasticky nezávislé.

5! 5.4

10 žm, 5 čd, 15 žd

30

$$\pi_X(0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29}$$

$$\pi_X(1) = \frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29} + \frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}$$

$$\pi_X(2) = \frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}$$

náhodné veličiny X, Y stochasticky ne

$$\pi(x)\begin{cases} \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} & x=0 \\ \dfrac{\binom{5}{1}\binom{25}{1}}{\binom{30}{2}} & x=1 \\ \dfrac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} & x=2 \end{cases}$$

$Y=0$

$X \backslash Y$	0	1	2	Σ
0	0	0		$\frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29}$
1				$\pi_X(1)$
2				$\pi_X(2)$
Σ	$\pi_Y(0)$	$\pi_Y(1)$	$\pi_Y(2)$	

nezávislé nejsou

stoch. nezávislé $X, Y \iff$

$$\pi_X(x)\cdot\pi_Y(y) = \pi_{X,Y}(x,y) \quad \forall x,y$$

$$F_X(x)\cdot F_Y(y) = F_{X,Y}(x,y) \quad \forall x,y$$

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu pátého stupně nad $\mathbb{Q}$, který není ireducibilní a přitom nemá v $\mathbb{Q}$ kořen. (1)

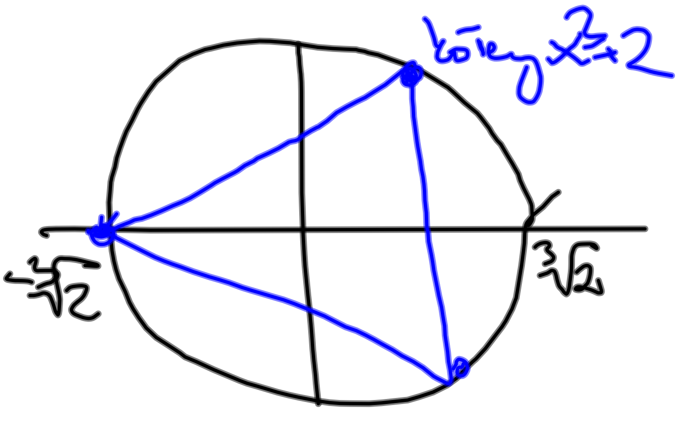
$f(x)$ má kořen α $\Rightarrow$ je dělitelný kořenovým činitelem $(x-\alpha)$ $\Rightarrow$ je reducibilní!

návod obráceně

Př: $(x^2+1)(x^3+2)$

x^2+1 ireducibilní (kořeny $\pm i \notin \mathbb{Q}$)

x^3+2 ireduc. díky Eisensteinovi (nebo tak, že nemá kořen v $\mathbb{Q}$)



c) ired. nad $\mathbb{Q}$ stupně $n \in \mathbb{N}$

$$x^n + 2 \,,\quad x^n - 2$$

Eisenstein: p ... prvočíslo

$p \mid a_0 \,,\ p^2 \nmid a_0 \qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$p \mid a_1, \dots, a_{n-1}$

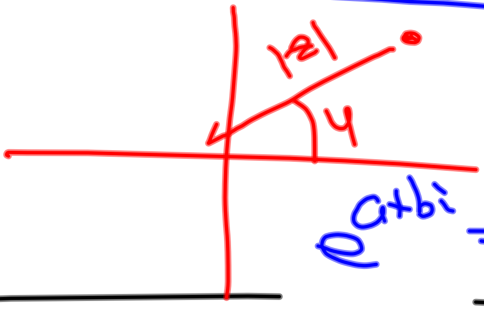
$p \nmid a_n$

Př: $G = (\mathbb{C}^\times, \cdot)$

$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{5}}$, $\langle \alpha \rangle = ?$

goniometrický tvar

$z \in \mathbb{C}$: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



$e^{a+bi} = e^{a}\cdot(\cos b + i\sin b)$

$(R, +, \cdot)$ okruh

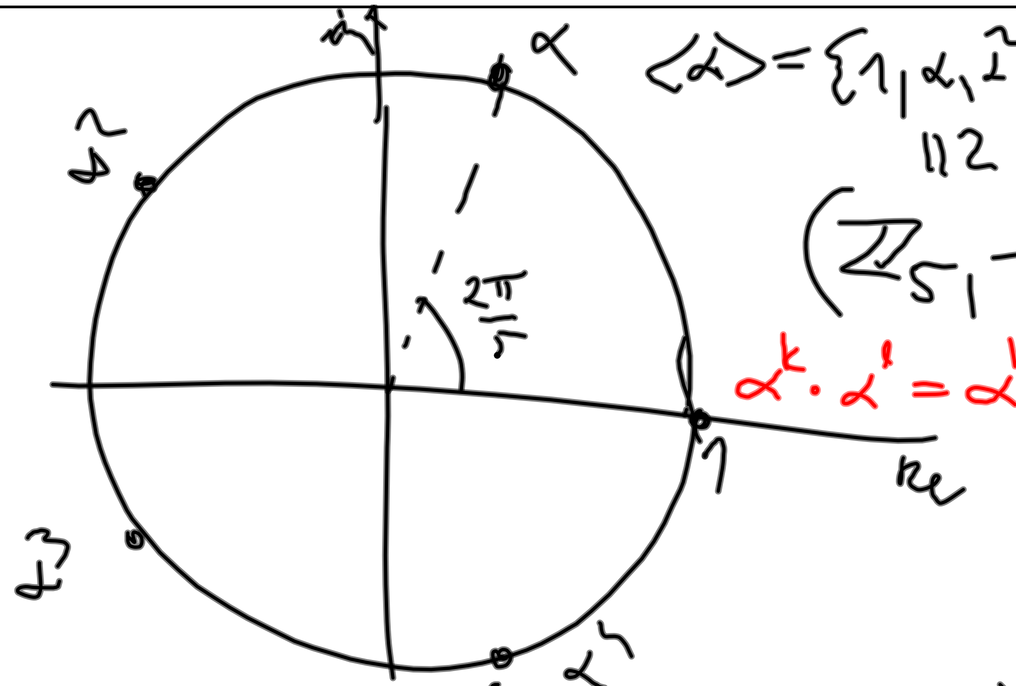
$(R^\times, \cdot)$ grupa jednotek (invertibilní prvky R)

$(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$ $a \in \mathbb{Z}_m^\times \iff (a, m) = 1$

$(\mathbb{Z}^\times, \cdot)$ $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

$(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

9



$$\langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\} \cong (\mathbb{Z}_5, +)$$

$$\alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l \bmod 5}$$

$$\underline{\underline{\alpha^5 = 1}}$$

$$\left(|z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)\right)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Popíšeme izomorfismus $(\mathbb{Z}_5, +) \to (\langle \alpha \rangle, \cdot)$

$$[a]_5 \longmapsto \alpha^a$$

(a) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 4$, $|b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete ~~pravděpodobnost,~~ že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné. a záporné! (4)

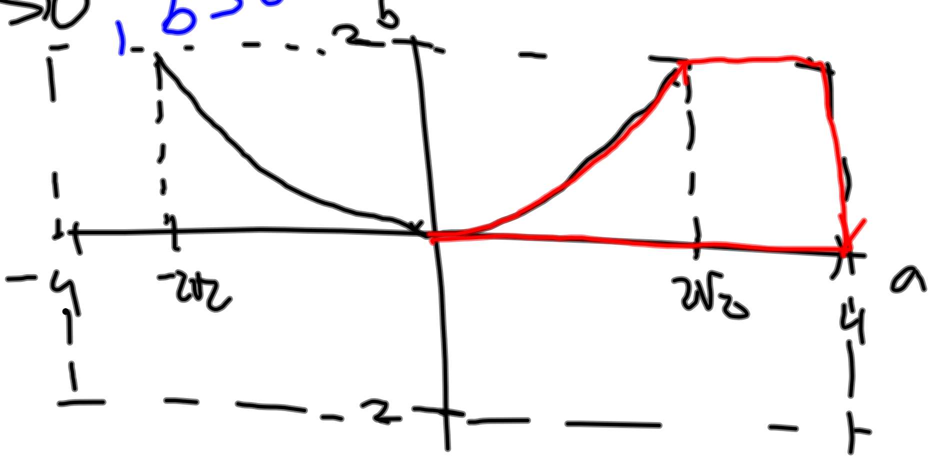
x_1, x_2 kořeny $\quad x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$

$$-a = x_1 + x_2, \quad b = x_1 \cdot x_2$$

$$\overset{(i)}{x_1, x_2 \in \mathbb{R}}, \; \overset{(ii)}{x_1 < 0, \; x_2 < 0}$$

(i) $D = a^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{a^2}{4}$

(ii) $a > 0$, $b > 0$



Př:

Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci danou vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 0,15 & \text{pro } x = -3 \\ 0,2 & \text{pro } x = -2 \\ 0,1 & \text{pro } x = -1 \\ 0,3 & \text{pro } x = 0 \\ 0,25 & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = X^2 - 2$.

$$\begin{array}{c} x^2-2 \\ \hline 7 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{array}$$

$$f(y) = \begin{cases} 0,15 & y = 7 \\ 0,2 & y = 2 \\ 0,3 & y = -2 \\ 0,35 & y = -1 \end{cases}$$

$$Y = X^2 - 2$$

$$P(Y = y) = P(X^2 - 2 = y) =$$

$$P(X^2 = y + 2) =$$

$$= P(X = \pm\sqrt{y+2}) \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}, \ldots$$

$$y = -1: \; P(X = \pm\sqrt{1}) =$$

$$= P(X = 1 \vee X = -1) =$$

$$= 0,1 + 0,25$$

5 17-13:35

$(G, \circ)$, $(H, \cdot)$

$H \leq G$ podgrupa

$H \trianglelefteq G$ normální podgrupa

$\forall g \in G \; \forall h \in H: \; g h g^{-1} \in H$

$(\Gamma, \circ)$ grupa; $f: G \to \Gamma$

$\ker f = \{ g \in G ; f(g) = e_{\Gamma} \}$

$\ker f \trianglelefteq G$; $G/_{\ker f} \cong f(G)$

$H \trianglelefteq G$: $G/H = \{ a \cdot H ; a \in G \}$

rozklad; příslušná ekvivalence:

$a \sim b \Leftrightarrow a \cdot H = b \cdot H \Leftrightarrow b^{-1} \cdot a \in H$

$\mathbb{R}^* / \{1,-1\}$:

$a \sim b \Leftrightarrow b^{-1} \cdot a \in \{-1,1\}$

$b^{-1} \cdot a = \pm 1$

$a = \pm b$

$\{ \{2,-2\}, \{1,-1\}, \{e,-e\}, \ldots \}$

$\mathbb{R}^* / \{1,-1\} \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$\ker f = \underline{\{1,-1\}}$

$f = \text{abs}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5 17-13:52

Příklad 9. Faktorizujte grupu $\mathbb{C}^*$ podgrupou $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

Příklad 10. Faktorizujte grupu $Gl_2(\mathbb{R})$ podgrupou $Sl_2(\mathbb{R})$. Zdůvodněte, proč je daná podgrupa normální.

$a, b \in \mathbb{C}^*: \; b^{-1} \cdot a \in H$

$\Leftrightarrow |b^{-1} \cdot a| = 1 \Leftrightarrow |a| = |b|$

Pozn $\mathbb{C}^*/H \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$f: \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot) \qquad \ker f = H$

$z \longmapsto |z|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$a, b \in GL_2(\mathbb{R}): \; b^{-1} \cdot a \in SL_2(\mathbb{R})$

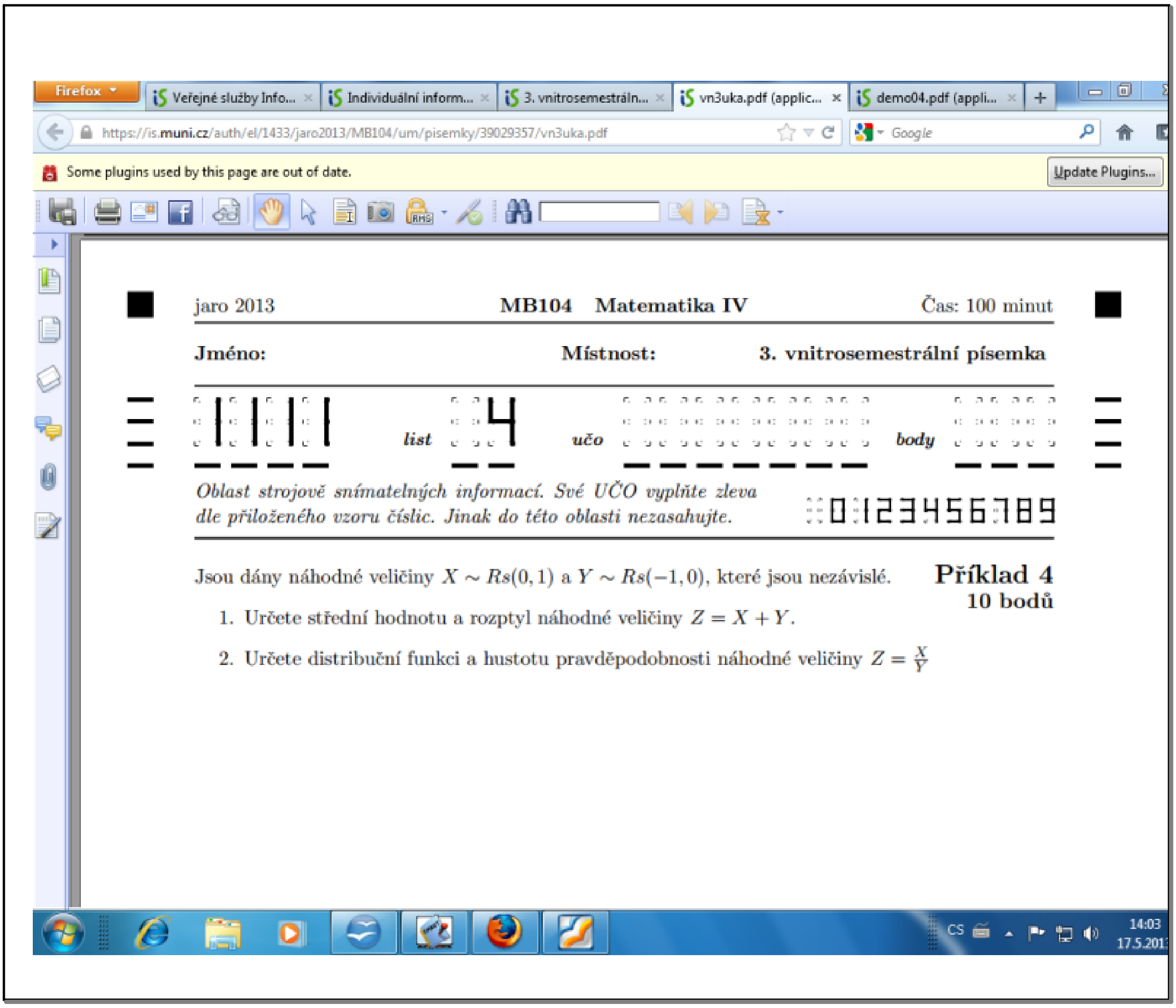
$1 = \det(b^{-1} \cdot a) = \det(b)^{-1} \cdot \det(a)$

$\det(a) = \det(b)$

$GL_2(\mathbb{R}) / SL_2(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\det: GL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\ker \det = SL_2(\mathbb{R})$



jaro 2013 **MB104 Matematika IV** Čas: 100 minut

Jméno: **Místnost:** **3. vnitrosemestrální písemka**

list *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 4
10 bodů

Jsou dány náhodné veličiny $X \sim Rs(0,1)$ a $Y \sim Rs(-1,0)$, které jsou nezávislé.

1. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z = X + Y$.
2. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Z = \frac{X}{Y}$

Jsou dány náhodné veličiny $X \sim Rs(0,1)$ a $Y \sim Rs(-1,0)$, které jsou nezávislé. **I**

1. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z = X + Y$.
2. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Z = \frac{X}{Y}$

1. $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) =$

$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$D(Z) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) = \frac{1}{6}$

$T \sim Rs(a,b) \quad a<b$

$f_T(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in (a,b)$, jinak 0

$$D(T) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2 - x(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4} \, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4} \cdot x \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{b^2 - a^2}{2}(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4} \cdot (b-a) \right]$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

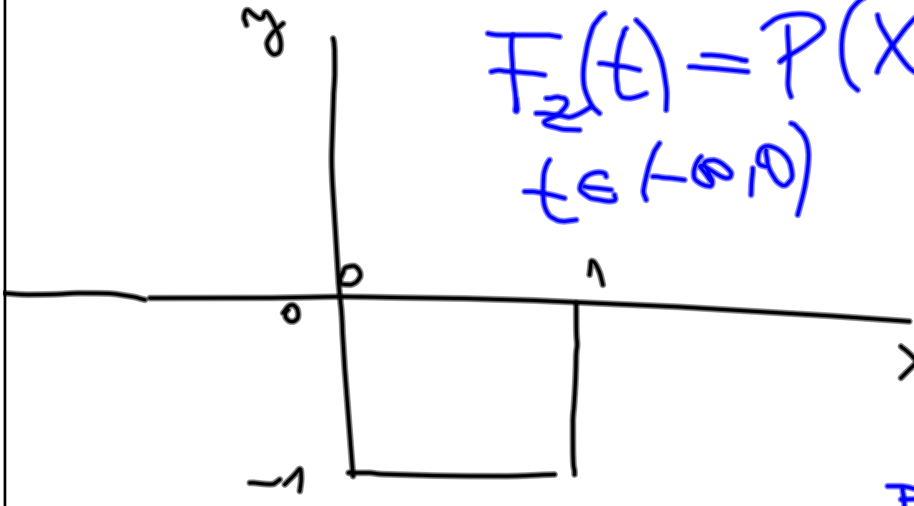
$Z = \frac{X}{Y}$, $X \sim Rs(0,1)$, $Y \sim Rs(-1,0)$

$\boxed{F_X(t) = t}$ $t \in (0,1)$

$F_Y(t) = t + 1$ $t \in (-1,0)$

$P(Z < z) = P\left(\frac{X}{Y} < z\right) =$

$= P(X > Y \cdot z)$



$F_Z(t) = P(X > Y \cdot t) =$

$t \in (-\infty, 0)$

$= 1 - P(X < Y \cdot t)$

$= 1 - F_X(Y \cdot t)$

$= 1 - Y \cdot t$

pro $Y \cdot t \in (0,1)$

X, Y nezávislé $F_Z(t) = F_X(t) \cdot F_{1/Y}(t)$

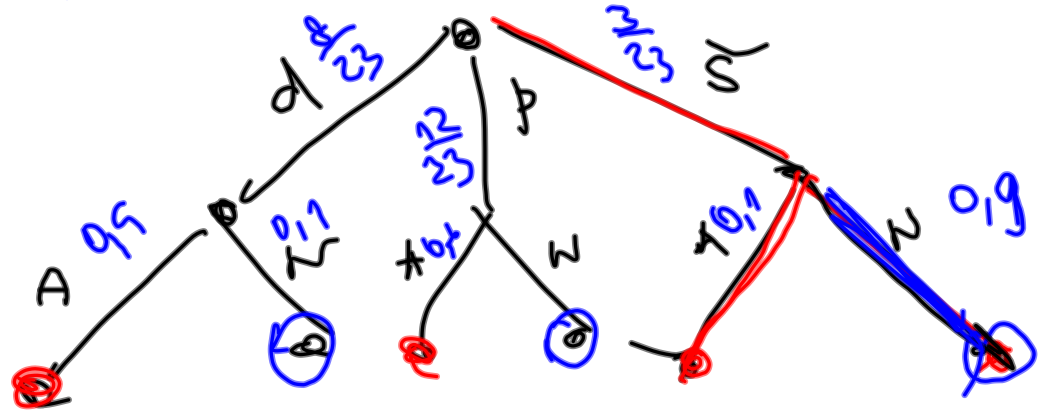
$$F_{\frac{1}{4}}(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{t}}_{-1,\,1}\Big) \qquad t \in (-\infty, -1)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-1 - \frac{1}{t}\Big)$$

$$F_Z(t) = F_X \cdot F_{\frac{1}{4}} = t\,\frac{1}{2}\Big(-1 - \frac{1}{t}\Big)$$

	dobří	prům.	slabí	
udělají	7,2	7,2	0,3	14,7
neud.	0,8	4,8	2,7	8,3
	8	12	3	23

a) $\frac{14,7}{23}$ b) $\frac{0,3}{14,7}$



$$\frac{\frac{3}{23}\cdot 0,1}{\frac{3}{23}\cdot 0,1+\frac{8}{23}\cdot 0,9+\frac{12}{23}\cdot 0,6}$$