$(G, \cdot)$

$\cdot : G \times G \to G$

binární operace

$(\mathbb{N}, -)$

$-$ není binární operace

asociativita:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2 20-15:58

neutrální prvek v $(G, \cdot)$ e_G:

$\forall a \in G: \quad a \cdot e_G = e_G \cdot a = a$

[je jediný: Sporem mějme 2 e_G, f_G:

$e_G \cdot f_G = f_G$, $e_G \cdot f_G = e_G$]

inverze k $a \in G$ je takové $b \in G$:

$a \cdot b = b \cdot a = e_G$

2 20-16:29

Motivační úvod | Grupy | Grupy permutací | Grupy symetrií | Podgrupy a homomorfismy | Součiny grup

Příklad

1. Přirozená čísla (s nulou) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, spolu s kteroukoliv z operací sčítání a násobení jsou asociativní a komutativní pologrupa s jednotkovým prvkem, neexistují v ní ale inverzní prvky.

$(\mathbb{N}_0, +)$ 0 je neutrální

$(\mathbb{N}_0, \cdot)$ 1 je jednotkový

2 20-16:39

$(\mathbb{Z}, -)$

kandidát na neutrální e:

$\forall a \in \mathbb{Z}: \quad e - a = a$

$e = 2 \cdot a \quad (*)$

$\nexists e \in \mathbb{Z}$ tak, aby $(*)$ platila.

2 20-16:41

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ komut. monoid,

$0 \in \mathbb{Q}$ nemá inverzi

$(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je kom. grupa

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*: \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

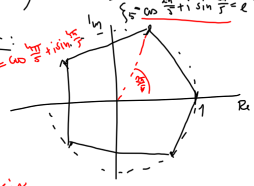
2 20-16:45

$\{z \in \mathbb{C};\ z^k = 1\}$

$\zeta_5 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5} = e^{\frac{2\pi i}{5}}$

$k = 5$:

$e^{\frac{4\pi i}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5}$



$e^{i \cdot \alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$

$G = \{1, \zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4\} =$

$\zeta_5^5 = 1$

$= \{1, e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}}\}$

$p = e^{\frac{2\pi i}{5}}$

$e^{\frac{10\pi i}{5}} = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

$= \{p^0, p^1, p^2, p^3, p^4\}$

např. $p^2 \cdot p^3 = p^{2+3} = p^5 = p^0 = 1$

2 20-16:48

$(Mat_n(\mathbb{R}), +)$ je komutativní grupa

$(Mat_n(\mathbb{N}), +)$ není

$V \to V$ lin. zobr. $Hom(V,V) = H_V$

$(H_V, +)$ $\forall v \in V$:

$f, g \in H_V$: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$

$(f \circ g)(v) = f(g(v))$

2 20-16:58

M M

5 5
5 4
5 3
5 2
5 1

∃ zobrazení 5^5

∃ invertibilních (prostých) $5!$

2 20-17:01

$S_3 = \{ \underset{a}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}, \underset{d}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}, \underset{f}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}}, \underset{c}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}}, \underset{e}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}} \}$

$c \circ d = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = e$

$d \circ c = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = f$

$d = (2,3)$ $a = (1)(2)(3)$

$b = (1,2,3)$ $e = (1,3)$

$c = (1,3,2)$ $f = (1,2)$

$A_3 = \{a, b, c\}$ podgrupa S_3

2 20-17:10

$(\mathbb{Z}_3, +) = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$

6, 9, −3 −2, 4, 34 5, 257

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

izomorfní grupy

$A_3 = \{a, b, c\}$

·	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

2 20-17:20

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&9&8&1&6&7&2&4&5\end{pmatrix} = \pi$

$(1,3,8,4)(2,9,5,6,7)$ sudá

složení transpozic lichá permutace

$(1,3,8,4) = (1,4) \circ (1,8) \circ (1,3)$

\# inverzí permutace π: $2+7+6+0+3+3+0+0+0 = 21$ LICHÁ

$i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)$

2 20-17:23

$sgn: S_n \to \{\pm 1\} \cong (\mathbb{Z}_2, +)$

·	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

$\{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$sgn(\sigma \circ \tau) = sgn\, \sigma \cdot sgn\, \tau$

sgn je homomorfismus

2 20-17:35