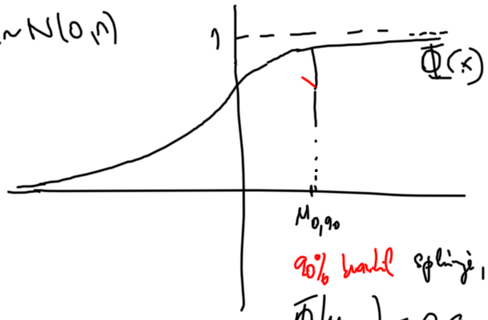
$X \sim N(0,1)$



90% hodnot splňuje, že

$\Phi(u_{0,9}) = 0,9$

tj. $u_{0,9} = \Phi^{-1}(0,9)$

4 24-15:59

Věta

Pro náhodnou veličinu X a reálná čísla a, b platí:

1. $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$,

Dk: $D(X) =: E\left((X - EX)^2\right) =$

$= E\left(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2\right) =$

$= E(X^2) - E(2X \cdot EX) + E\left((EX)^2\right)$

$E(X)^2$

$E(X^2) - 2EX \cdot E(X) + (EX)^2 =$

$= E(X^2) - (EX)^2$

4 24-16:13

Př: „cinknutá" kostka:

		$(X-EX)^2$	X^2
1	$1/3$	$(1-\frac{25}{8})^2$	1
2	$1/12$	$(2-\frac{25}{8})^2$	4
3	$1/12$		9
4	$1/4$		16
5	$1/8$		25
6	$1/8$	$(6-\frac{25}{8})^2$	36

$EX = 1 \cdot 1/3 + 2 \cdot 1/12 + \dots + 6 \cdot 1/8 = \frac{25}{8}$

$DX = 1/3 \cdot (1-\frac{25}{8})^2 + \dots + 1/8 \cdot (6 - \frac{25}{8})^2$

$E(X^2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + 1/12 \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot 9 + \dots + \frac{1}{8} \cdot 36 = \frac{3}{3} + \frac{99}{8}$

$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{3} + \frac{99}{8} - (\frac{25}{8})^2$

4 24-16:17

Mnemotech.:

$D(X+Y) \dots \sim (X+Y)^2$

$X \cdot X + Y \cdot Y + X \cdot Y + Y \cdot X$

$D(X) + D(Y) \quad C(X,Y) \quad C(Y,X)$

Nezávislost X, Y:

diskrétní: $P(X=a \wedge Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$ $\forall a,b$

spojité: $F_X(s) \cdot F_Y(t) = F_{X,Y}(s,t)$

4 24-16:26

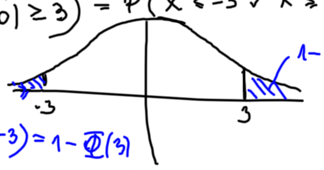
Příklad

Nechť je $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.

1. Odhadněte $P(|X-\mu| \geq 3\sigma)$.
2. Vypočtěte $P(|X-\mu| \geq 3\sigma)$, jestliže navíc víte, že $X \sim N(0,1)$.

ad 2) $X \sim N(0,1)$ $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$

$P(|X-0| \geq 3) = P(X \leq -3 \vee X \geq 3) = 2 \cdot \Phi(-3) = 2 - 2\Phi(3)$



$1 - \Phi(3)$

$\Phi(-3) = 1 - \Phi(3)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

4 24-17:02

$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EY_i = n \cdot \mu$

$D\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DY_i = n \cdot \sigma^2$

$C = \sum Y_i$

$\frac{C - EC}{\sqrt{DC}} = \frac{C - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} = \frac{C - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} =$

$= \frac{\sum (Y_i - \mu)}{\sigma \sqrt{n}} = S_n$

4 24-17:13

pol. slidu: $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right) =$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1$

Proto $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1 \geq 0{,}95$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \geq 0{,}975$

$\Updownarrow$

$\frac{\sqrt{n}}{15} \geq 1{,}96$

$n \geq (15 \cdot 1{,}96)^2$

4 24-17:17

Číselné charakteristiky náhodných veličin · Normální rozdělení a rozdělení odvozená · Limitní věty a odhady · Náhodný vektor

Ukážeme na příkladech, že pravděpodobnostní struktura náhodného vektoru (X, Y) není určena pouze marginálními rozděleními veličin X a Y. Podstatný je rovněž pravděpodobnostní vztah mezi X a Y, který je částečně popsán např. prostřednictvím korelačního koeficientu.

Příklad

Jsou-li X a Y náhodné veličiny, nabývající hodnot 0 a 1, pak

$P(X = 1, Y = 1) - P(X = 1)P(Y = 1) = E(XY) - E(X)E(Y) = \mathrm{cov}(X, Y)$.

$E(X \cdot Y) = P(X=0, Y=0) \cdot 0 + P(X=0, Y=1) \cdot 0 + P(X=1, Y=0) \cdot 0 + P(X=1, Y=1) \cdot 1$
$= P(X=1, Y=1)$

4 24-17:28

Číselné charakteristiky náhodných veličin · Normální rozdělení a rozdělení odvozená · Limitní věty a odhady · Náhodný vektor

Uveďme ještě příklad, ilustrující, že nekorelovanost nemusí implikovat nezávislost:

Příklad

Buďte A a X nezávislé náhodné veličiny, splňující $X \sim N(0, 1)$ a $P(A = 1) = P(A = -1) = 1/2$. Položíme-li $Y = AX$, pak

$$P(Y < y) = \frac{1}{2}P(X < y) + \frac{1}{2}P(-X < y) = \Phi(y),$$

proto má rovněž Y rozdělení $N(0, 1)$.

Dále $\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(AX^2) = E(A)E(X^2) = 0 \cdot 1 = 0$, přitom $P(X = Y) = P(X = -Y) = 1/2$ a X, Y zřejmě nejsou nezávislé.

$D(X) = E(X^2) - (EX)^2$
$\overset{\shortparallel}{1} = E(X^2) - 0^2 \Rightarrow E(X^2) = 1$

4 24-17:32