Důsledek

- *Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme opačný jev k jevu A.*
- *Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subset \Omega$ platí*

$$\underbrace{A \setminus (\Omega \setminus B)}_{L} = \overbrace{A \cap B}^{P}.$$

Takový systém množin $\mathcal{A}$ se pak nazývá σ-algebra.

$L = P \iff \forall x \in \Omega : x \in L \iff x \in P$

$x \in L \iff x \in A \setminus (\Omega \setminus B) \iff x \in A \wedge$
$\wedge\, x \notin (\Omega \setminus B) \iff x \in A \wedge x \notin B^c$
$\iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in A \cap B$

4 3-15:49

Důsledek

Pro všechny jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

4 3-16:37

Pro všechny jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

- $P(\emptyset) = 0, \; 0 \leq P(A) \leq 1,$

$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \qquad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ neslučitelné

$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) \quad / - P(\emptyset)$

$\underline{\underline{0 = P(\emptyset)}}$

$P(\Omega) = 1$

$P(A \cup (\Omega \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(A^c)}_{\geq 0}$ neslučitelné

$1 = P(\Omega)$

$\Rightarrow P(A) \leq 1$

4 3-16:37

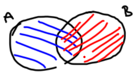
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B), \; P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$

$B = A \cup (B \setminus A)$ nesluč. $\Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

4 3-16:46



$\bigcirc$ - odečteme

$P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) =$ po dvou neslučitelné

$= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) =$

$= [P(A \setminus B) + P(A \cap B)] + [P(B \setminus A) + P(A \cap B)]$
$- P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pz.: $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

$(x \in A \setminus B) \vee (x \in A \cap B) \iff$

$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\iff (x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \in B)$

$\iff x \in A$

4 3-16:48

- *Je-li $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, pak*

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} P(A_i),$$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$
$= A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$ po dvou neslučitelné, díky $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1} \setminus A_i)$

$\leq P(A_1) + \sum_{i=1}^{n} P(A_{i+1}) \quad (3)$

$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1}) - P(A_i)$

$= P(A_1) + (P(A_2) - P(A_1)) + (P(A_3) - P(A_2)) + \dots$

$= \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

4 3-16:56

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq \dots$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) =$$

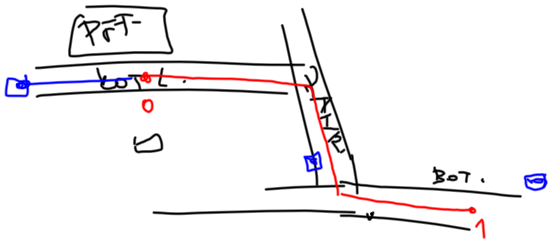
$$= \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) =$$

$$= \boxed{1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) =$$

$$= \boxed{1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)}$$

4 3-17:02



4 3-17:10

$$P(A|H) = \frac{P(A\cap H)}{P(H)}$$

$$\Downarrow$$

$$P(A|H)\cdot P(H) = P(A\cap H)$$

A, H nezávislé, tj. $P(A) = P(A|H)$

$$\Rightarrow P(A)\cdot P(H) = P(A\cap H)$$

4 3-17:26

$$B = (A\cap B) \cup (A^c \cap B) \qquad \Omega = A \cup A^c$$

neslúč.

$$P(B) = P(A\cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$P(A)\cdot P(B|A) + P(A^c)\cdot P(B|A^c)$$

$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$ neslučitelné

$$\Downarrow$$

$$P(B) = P(H_1\cap B) + P(H_2\cap B) + \dots + P(H_k\cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i)\cdot P(B|H_i)$$

4 3-17:34