$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Házení kostkou:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$A \in \mathcal{A}: \ P(A) = \frac{|A|}{6}$

Př: náh. veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X(\omega_i) = i^2$

B je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}$

$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$

$16, 25, 36 \notin B_0$

$1, 4, 9 \in B_0$

např. $B_0 = \langle 0, 10 \rangle$

$P_X(B_0) = P(0 \le X(\omega) \le 10) = \frac{1}{2}$

4 10-15:58

Náhodné veličiny | Typy diskrétních náhodných veličin | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Příklad

Hodíme jedenkrát kostkou, množina elementárních jevů je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Jevovým polem nechť je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega\}$.
Zjistěte jestli zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dané předpisem

a) $X(\omega_i) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $X(\omega_1) = X(\omega_2) = -2, X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 3$

je náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

a) $P_X(\langle 1;3 \rangle) = P(X^{-1}(\langle 1;3 \rangle)) =$

$= P(1 \le X \le 3) =$

$= P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) \stackrel{?}{=}$ nedef.

X není náh. veličina

b) jde o náh. veličinu; buď $B \subset \mathbb{R}$ lib.

$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\underbrace{X(\omega)}_{-2;3} \in B)$

Pokud $\{-2, 3\} \subseteq B \Rightarrow P_X(B) = 1$

$B \cap \{-2, 3\} = \emptyset \Rightarrow P_X(B) = P(\emptyset) = 0$

$-2 \in B \wedge 3 \notin B \Rightarrow P_X(B) = P(\{\omega_1, \omega_2\})$

$3 \in B \wedge -2 \notin B \Rightarrow P_X(B) = P(\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\})$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ p & x \in \langle -2, 3) \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

kde $p = P(\{\omega_1, \omega_2\})$

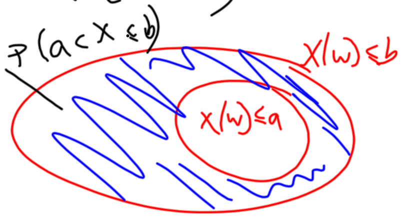
4 10-16:21

$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$

Distr. fce $F_X(x) = P(X \le x)$

$P(a < X \le b) = P(X \le b)$

$- P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$



4 10-16:44

Náhodné veličiny | Typy diskrétních náhodných veličin | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Vlastnosti distribuční funkce

Věta

Nechť X je náhodná veličina, $F(x)$ je její distribuční funkce.

1. *F je neklesající.*
2. *F je zprava spojitá, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.*
3. *Je-li X diskrétní s hodnotami $x_1, \dots, x_n$, pak je $F(x)$ po částech konstantní, $F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$ a $F(x) = 1$ kdykoliv $x \ge x_n$.*
4. *Je-li X spojitá, pak je $F(x)$ diferencovatelná a její derivace se rovná hustotě X, tj. platí $F'(x) = f(x)$.*

$x_1 < x_2 < \dots x_n$

4 10-16:50

ad 1) F neklesající:

$x < y \stackrel{?}{\Rightarrow} F(x) \le F(y)$

$P(X \le y)$

$\parallel$

$P(X \le x \vee x < X \le y)$

disjunktní

$\parallel$

$P(X \le x) + \underbrace{P(x < X \le y)}_{\ge 0}$

4 10-16:52

ad 2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \le x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \le x) = 1$

F zprava spojitá: $\lim_{x \to a^+} F(x) \stackrel{?}{=} F(a)$

v $a \in \mathbb{R}$

$\parallel$

$\lim_{x \to a^+} P(X \le x)$

$P(\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon) = P(X \le a)$

$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le a + \varepsilon\}$

pozn. není zleva spojitá, ale

$\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a) - P(X = a)$

4 10-16:55

$X \sim Rd(m)$: $\quad X: \Omega \to \{1, \dots, m\}$

$$f(x) = \frac{1}{m} \text{ pro } x \in \{1, \dots, m\}, \quad 0 \text{ jinde}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{m} & x \in \langle 1, 2) \\ \frac{2}{m} & x \in \langle 2, 3) \\ \vdots & \\ \frac{k}{m} & x \in \langle k, k+1) \quad 1 \le k \le n-1 \\ 1 & x \ge m \end{cases}$$

4 10-17:11

Náhodné veličiny | **Typy diskrétních náhodných veličin** | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Binomické rozdělení

Na obrázku jsou pravděpodobnostní funkce pro Bi(50, 0.2), Bi(50, 0.5) a Bi(50, 0.9). Rozdělení pravděpodobnosti dobře odpovídá intuici, že nejvíce výsledků bude blízko u hodnoty *np*:

4 10-17:16

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{r_n}{k} \cdot \frac{(n-1)^{r_n-k}}{n^{r_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\cdots(r_n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-1)^{r_n}}{n^{r_n}\cdot(n-1)^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\cdots(r_n-k+1)}{(n-1)^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r_n} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - c}{n-1} = \lambda\right] = \frac{1}{k!}\lambda^k \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r_n} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-\frac{r_n}{n}}{r_n}\right)^{r_n} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{r_n\to\infty}\left(1 + \frac{-\lambda}{r_n}\right)^{r_n}$$

Pozn. $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

4 10-17:19