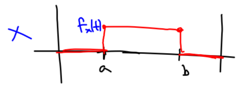
diskrétní n.v. – pravdip. fce $p_x(x)$, distribuční fce $F_X(t) = \boxed{P(X \le t)} = P(X(\omega) \le t) = P(\{\omega;\, X(\omega) \le t\})$

spojitá n.v. – hustota n.v. $f_X(t) = F_X'(t)$
– distribuční fce: $F_X(t) = P(X \le t)$

4 17-15:53



Musí platit $F_X(t) = 1 \ \forall t \ge b$

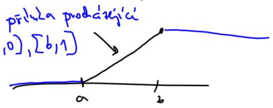
$\Rightarrow f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \notin \langle a,b\rangle \\ \frac{1}{b-a} & \text{pro } t \in \langle a,b\rangle \end{cases}$

$t \in \langle a,b\rangle$

Distr. fce $F_X(t) = \int_a^t f_X(z)\,dz = \int_a^t \frac{dz}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^t dz = \frac{1}{b-a}\cdot(t-a)$

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & t \in \langle a,b\rangle \\ 0 & t < a \\ 1 & t > b \end{cases}$$

přímka procházející $[a,0],[b,1]$



4 17-16:08

$X \sim N(0,1)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

μ – stř. hodnota, σ^2 – rozptyl

4 17-16:33

4 17-16:45

Příklad

Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r\rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

Řešení

Určeme nejprve distribuční funkci F (pro $0 < d < \frac{4}{3}\pi r^3$)

$P(V \le d) = F_V(d)$

$$F(d) = P\left[\frac{4}{3}\pi X^3 \le d\right] = P\left[X \le \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right] = \frac{\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}}{r},$$

$F_X\left(\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right)$, kde $F_X(t) = \frac{t}{r}$

celkem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \le 0 \\ \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi r^3}}\, x^{\frac{1}{3}} & \text{pro} \quad 0 < x < \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 1 & \text{pro} \quad x \ge \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

Derivováním pak obdržíme hustotu pravděpodobnosti.

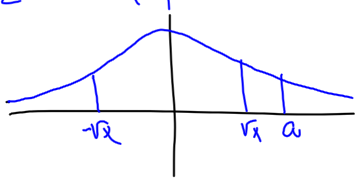
$\frac{4}{3}\pi X^3 \le d \quad / : \frac{4}{3}\pi$

$X^3 \le \frac{3d}{4\pi} \quad / \sqrt[3]{\ }$

$X \le \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}$

4 17-16:45

$Z \sim N(0,1)$



$P(Z < a) = F_Z(a) = \int_{-\infty}^{a} f_Z(a)$

$P[-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}] = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_Z(t)\,dt = F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x})$

4 17-16:41

Spojité náhodné veličiny | Funkce náhodných veličin | Číselné charakteristiky náhodných veličin

Řešení (pokr.)

Volbou $p = 1/6$, $A = 1800$, $B = 2100$, $n = 12000$ dostáváme odhad

$$P \approx \Phi\left(\frac{2100-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) = $$
$$= \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0,992.$$

$X_n \sim Bi(n,p)$ $\quad E(X_n) = n\cdot p$, $\quad D(X_n) = n\cdot p(1-p)$

$$P(A < \underbrace{X_n}_{\to N(0,1)} < B) =$$
$$= P(A - E(X_n) < X_n - E(X_n) < B - E(X_n)) =$$
$$= P(A - n\cdot p < X_n - n\cdot p < B - n\cdot p) =$$
$$= P\left(\frac{A-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{B-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

dle M-L věta $Z \sim N(0,1)$

$$= P\left(\frac{A-n\cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} < Z < \frac{B-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$
$$\approx \Phi\left(\frac{B-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

4 17-17:11

Spojité náhodné veličiny | Funkce náhodných veličin | Číselné charakteristiky náhodných veličin

Řešení (pokr.)

Volbou $p = 1/6$, $A = 1800$, $B = 2100$, $n = 12000$ dostáváme odhad

$$P \approx \Phi\left(\frac{2100-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) = $$
$$= \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0,992.$$

Poznámka

Statistické tabulky – viz např. https://is.muni.cz/auth/el/1433/jaro2013/MB104/um/StatTab.pdf nebo sbírka příkladů [BMO].

Příklad

Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi tisíci novorozenci bude alespoň tolik děvčat jako chlapců?

$Bi(n,p)$ $\quad n = 1000$, $p = 0{,}515$

$$P(X \leq 500)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{500-515}{\sqrt{1000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}\right)$$

4 17-17:20

Spojité náhodné veličiny | Funkce náhodných veličin | Číselné charakteristiky náhodných veličin

Řešení (pokr.)

Volbou $p = 1/6$, $A = 1800$, $B = 2100$, $n = 12000$ dostáváme odhad

$$P \approx \Phi\left(\frac{2100-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) = $$
$$= \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0,992.$$

4 17-17:11

$$EX = \sum_i x_i f_X(x_i)$$
$$Y = \psi(X) \Rightarrow EY = E(\psi(X)) =$$
$$= \sum_i \psi(x_i) f_X(x_i)$$

např. $Y = X^2 + 1$

$$EY = \sum_i (x_i^2 + 1)\cdot f_X(x_i)$$

4 17-17:06

Příklad

Spočtěme střední hodnotu binomického rozdělení.

Řešení

Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$ je

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k}_{x_i} \cdot \overbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}^{P(X=x_i)} = \sum k\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdots$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$
$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} p^j (1-p)^{n-1-j} =$$
$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

4 17-17:35