Příklad 1. *Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.*

a) *Určete základní prostor* Ω. $= \{1,2,3,4,5,6\}$

b) *Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B.*

$A = \{1,3,5\}$

$B = \{2,3,5\}$

c) *Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete:*

- *padne sudé číslo,* $A^c = \bar{A} = \Omega \setminus A$
- *padne číslo 2,* $B \setminus A = B \cap (\Omega \setminus A)$
- *padne číslo 2 nebo 3* nelze vyjádřit

jevové pole

d) *Určete nejmenší měřitelný prostor* $(\Omega, \mathcal{A})$*, obsahující jevy A i B.*

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, B, A^c = \{2,4,6\}, B^c = \{1,4,6\}, A \cup B,$
$B \setminus A = \{2\}, A \setminus B = \{1\}, \{4,6\}, \{1,2\}, \{2\}^c, \{1\}^c,$
$A \cap B = \{3,5\}, A^c \cup B^c = \{3,4,5,6\}\}$

4 12-16:00

Příklad 2. *Přístroj se skládá ze dvou částí, první část má 2 bloky, druhá 3 bloky. Nechť jev* A_1*, resp.* A_2*, znamená, že blok 1, resp. blok 2, první části je v pořádku, jevy* B_1, B_2, B_3 *jsou analogické pro druhou část. Přístroj je schopen provozu, pokud jsou alespoň jeden blok první části a alespoň dva bloky druhé části v pořádku.*

Zapište jev C vyjadřující, že přístroj je schopen provozu.

$$C = (A_1 \cup A_2) \cap \big((B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_3)\big)$$

$$\big((B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_3)\big) \neq (B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c)^c$$

4 12-16:19

Podmíněná pravděpodobnost:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \qquad (P(H) > 0)$$

Bayesovy vzorce

$$1.\ B.v.\quad P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$$

nezávislost: $P(A|B) = P(A)$

$\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4 12-16:22

Příklad 3. a) *Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.*

b) *Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:*

- *třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.*
- *první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.*

a) $a \geq 1$

A... 1. koule bílá

B... 2. koule bílá

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{a-1}{a+b-1}$$

4 12-16:22

A... první 2 výrobky jsou kvalitní

B... třetí je zmetek

$P(B|A) = ?$ $\quad P(A \cap B) = ?$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99}$$

$$P(A \cap B) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98}$$

zbytečné

$P(B|A)$ lepší

$= \frac{10}{98}$

4 12-16:32

Příklad 4. *Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu jsou postupně 0,4 , 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne terč*

a) *právě jednou,*

b) *aspoň jednou?*

A_i... i-tou střelou zasáhne, $i \in \{1,2,3\}$

$P(A_1) = 0{,}4$

$P(A_2) = 0{,}5$

$P(A_3) = 0{,}7$

ad a)

$$(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$

neslučitelné (po dvou)

$\Rightarrow$ P-sti sčítají

$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$

$$P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 =$$

$$= 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}21 = \underline{0{,}36}$$

ad b)

$$P\left(\overline{(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)}\right) =$$

$$1 - \left[P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3)\right] = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 =$$

$$= 1 - 0{,}09 = \underline{\underline{0{,}91}}$$

4 12-16:39

Příklad 5. *Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné jevy, $P(A_i) = p_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Vyjádřete pravděpodobnost, že*

a) *nastane aspoň jeden z uvedených jevů,*

b) *nastanou všechny uvedené jevy,*

c) *nastane právě jeden z uvedených jevů.*

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ad a) $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$

ad b) $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$

ad c) $P((A_1 \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \dots \cap \overline{A_n}) \cup \dots) =$

$= p_1 \cdot (1-p_2) \dots (1-p_n) + (1-p_1) \cdot p_2 \cdots (1-p_n) + \dots + \dots + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_{n-1}) \cdot p_n =$

$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (1-p_i)}_{R} \cdot \frac{p_j}{1-p_j} = R \cdot \sum \frac{p_j}{1-p_j}$

4 12-16:46

Příklad 6. *Dva střelci vystřelí nezávisle na sobě do téhož terče každý jednu ránu. Po střelbě byl v terči nalezen 1 zásah. Určete pravděpodobnost, že zásah patří 1. střelci, pokud tento trefuje terče s pravděpodobností 0,8, zatímco druhý střelec s pravděpodobností 0,4.*

A ... 1. střelec se trefí

B ... 2. střelec – " –

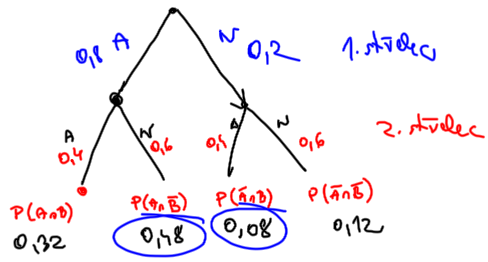
H ... nastane právě jeden z A, B

$H = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{P(A \cap \overline{B}) + \cancel{P(A \cap \overline{A} \cap B)}}{P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)} =$

$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}6}{0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}48}{0{,}48 + 0{,}08} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$

4 12-16:52



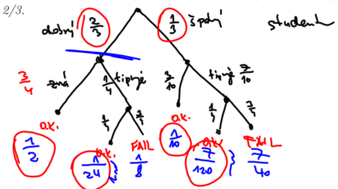
1 zásah: 0,56

$P(1.\ \text{střelec} \mid 1\ \text{zásah}) = \frac{0{,}48}{0{,}56} = \frac{6}{7}$

4 12-16:38

Příklad 7. *V testu jsou u každé otázky 4 možné odpovědi. Pokud student nezná odpověď, tak hádá (uhodne s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Dobrý student zná 75% odpovědí, slabý 30%. Jestliže byla určitá otázka zodpovězena správně, určete pravděpodobnost, že student jen hádal, jde-li o:*

- *dobrého studenta,*
- *špatného studenta,*
- *náhodného studenta, kdy navíc víme, že dobrých studentů jsou 2/3.*



O ... otázka zodpovězena správně: $P(O) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{10} + \frac{7}{120} = \frac{60+5+12+7}{120} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$

(i) $\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{13}$

(ii) $\frac{7}{120} / \left(\frac{1}{10} + \frac{7}{120}\right) = \frac{7}{19}$

(iii) $\frac{\frac{1}{24} + \frac{7}{120}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{12}{120}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{7}$

4 12-17:01

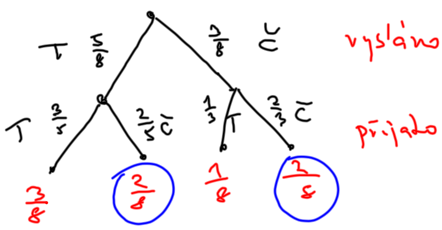
Doplň.: jestliže byla správná odpověď, s jakou P to bylo od dobrého stud.

$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{13}{24}}{\frac{7}{10}} = \frac{130}{168} = \frac{65}{84}$

4 12-17:12

Příklad 8. *Turistický oddíl si předává zprávy Morseovou abecedou s těmito vlastnostmi: pokud je odvysílána tečka, pak ve 40% případů je přijata čárka (jinak tečka), pokud je odvysílána čárka, je v 1/3 případů přijata tečka (jinak čárka). Zpráva obsahuje tečky a čárky v poměru 5 : 3. Určete pravděpodobnost,*

- *že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá čárka,*
- *že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá tečka.*

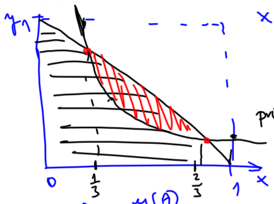


i) $\frac{\frac{2}{8}}{\frac{2}{8} + \frac{2}{8}} = \frac{1}{2}$

ii) $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{4}$

4 12-17:16

Příklad 9. *Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu* $(0,1)$ *budou mít součet menší než 1 a součin větší než* $2/9$*?*



$x+y<1$

$xy > \frac{2}{9}$

$y > \frac{2}{9x}$

průsečíky:

$y = 1-x$

$xy = \frac{2}{9}$

$x(1-x) = \frac{2}{9}$

$x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$

$$P([x,y] \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\square)} = \mu(A)$$

$$D = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \frac{1}{3}}{2} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu(A) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (1-x) - \frac{2}{9x}\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\ln x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} =$$

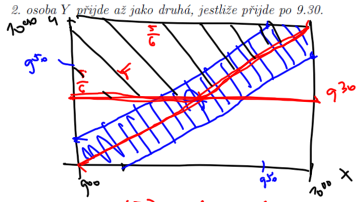
$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{2}{9}\ln\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2 = \underline{\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2}$$

4 12-17:20

Příklad 10. *Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:*

1. *první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,*
2. *osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.*



i) $\mu(A) = 1 - 2\mu(F) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \underline{\underline{\frac{11}{36}}}$

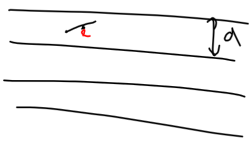
ii) B… Y přijde po 9^{30}

C… Y přijde jako druhá

$$P(C \mid B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\mu(\square)}{\mu(\square)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

4 12-17:30

Příklad 11 (Buffonova úloha). *Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky* $l < d$*. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku.*

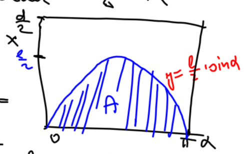


protne $\Rightarrow$

$$\frac{l}{2} \geq \frac{x}{\sin\alpha}$$

příznivý výsledek $x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\pi \cdot \frac{d}{2}}$$



$$\mu(A) = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\alpha\,d\alpha =$$

$$= \frac{l}{2}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi} = \frac{l}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{l}}$$

$$\underline{\underline{P(A) = \frac{2l}{\pi d}}}$$

$\left[l = \frac{d}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi} \right]$

4 12-17:37