Příklad 1. *Mějme nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou μ.*

1. *Bez dalších informací o rozdělení X odhadněte $P(X > 3\mu)$.*
2. *Víte-li, že $X \sim \mathrm{Ex}(\frac{1}{\mu})$, vypočtěte $P(X > 3\mu)$.*

$EX = \mu$

Čeb. $P(|X - EX| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$, $DX = \sigma^2$

Markov. $P(X \geq k \cdot EX) \leq \frac{1}{k}$

ad 1. $P(X > 3\mu) \leq \frac{1}{3}$

ad 2. $X \sim \mathrm{Ex}(\frac{1}{\mu})$ $\lambda := \frac{1}{\mu}$ $Y \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$ $EY = \frac{1}{\lambda}$

hustota $f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$ $t > 0$

$EX = \mu$ $f_X(t) = 0$ $t \leq 0$

$P(X > 3\mu) = 1 - P(X \leq 3\mu) =$

$= 1 - F_X(3\mu)$

$F_X(3\mu) = \int_{-\infty}^{3\mu} f_X(t)\,dt = \int_0^{3\mu} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt =$

$= \int_0^{3\mu} \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{1}{\mu}t}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{subs. } u = -\frac{1}{\mu} \cdot t \\ du = -\frac{1}{\mu} \cdot dt \end{array} \right|$

$= \int_0^{-3} -e^u\,du = \int_{-3}^0 e^u\,du = [e^u]_{-3}^0 =$

$= 1 - e^{-3} \Rightarrow P(X > 3\mu) = e^{-3} \approx$

$\approx 0{,}049787$

5 10-16:02

Příklad 2. *Určete pravděpodobnost, že při 600 hodech kostkou padne šestka alespoň 75 krát a nejvýše 125 krát*

1. *pomocí Čebyševovy nerovnosti,*
2. *pomocí de Moivre-Laplaceovy věty.*

$EX = np = 100$

$DX = np(1-p) = \frac{500}{6} = \frac{250}{3}$

$X \sim Bi(600; \frac{1}{6})$ (n, p)

ad 1. Čebyšev: $P(|X - EX| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$; $|X - EX| \geq \lambda$, $\leq \frac{DX}{\lambda^2}$

$P(|X - 100| \leq 25) =$

$= 1 - P(|X - 100| > 25) \geq 1 - \frac{DX}{25^2} =$

$= 1 - \frac{250/3}{25^2} = 1 - \frac{10}{75} = \frac{65}{75} \approx 0{,}86$

5 10-16:03

ad 2. $X \sim Bi(600; \frac{1}{6})$

$P(X = k) = \binom{600}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$

$P(75 \leq X \leq 125) = \sum_{k=75}^{125} \binom{600}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$

přenecháme počítači ...

de Moivre-Laplace: $\boxed{\begin{array}{c} np(1-p) > 9 \\ \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1} \end{array}}$

X má „skoro normální rozdělení“ $N(100, \frac{250}{3})$

F - distribuce $N(100, \frac{250}{3})$

$P(\ldots) = F(125) - F(75) \approx 0{,}99692 - 0{,}00308 \approx 0{,}99384$

S využitím běžných tabulek

$P(75 \leq X \leq 125) = P\left(\frac{75 - 100}{\sqrt{250/3}} \leq \frac{X - 100}{\sqrt{250/3}} \leq \underbrace{\frac{125 - 100}{\sqrt{250/3}}}_{\alpha}\right) = P(-\alpha \leq U \leq \alpha) =$

$U \sim N(0,1)$

$= \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) =$

$= 2\Phi(\alpha) - 1$

$\alpha \approx 2{,}7386$

$\Phi(\alpha) \approx 0{,}9969 \Rightarrow P(\ldots) \approx 0{,}9938$

5 10-16:28

Příklad 3. *Víme, že v jisté oblasti je 80% domácností vybaveno DVD přehrávačem. S pravděpodobností 95% určete*

1. *rozmezí počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností, které vlastní DVD,*
2. *dolní odhad počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností, které vlastní DVD.*

5 10-16:03

Příklad 4. *Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením $N(6\mathrm{g}; 1{,}196\mathrm{g}^2)$. Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček.*

$X_1 \sim N(6; 1{,}196)$ $? = P(X_1 + \ldots + X_{16} \leq 100)$

$\vdots$

$X_{16} \sim N(6; 1{,}196)$

Náhodný výběr; Statistika M $(= \bar{X})$ $\frac{\sum X_i}{16}$ $\frac{\sum X_i}{n}$

stoch. nez. $X_1, \ldots, X_{16}$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\boxed{M \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$

$EM = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_i EX_i = \frac{1}{n}\sum_i \mu = \mu$

$DM = D\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D(\sum X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_i D(X_i)$

$= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$

$P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 100\right) = P\left(\frac{\sum X_i}{16} \leq \frac{100}{16}\right) =$ (M)

$= P\left(M \leq \frac{100}{16}\right)$

Normujeme: $= P\left(\frac{M - 6}{\sqrt{1{,}196}/4} \leq \frac{\frac{100}{16} - 6}{\sqrt{1{,}196}/4}\right)$ ($\sim N(0,1)$)

$= \Phi\left(\frac{\frac{100}{16} - 6}{\sqrt{1{,}196}/4}\right) = \Phi\left(\frac{1/4}{\sqrt{}/4}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{1{,}196}}\right)$

$= \Phi(0{,}9144) \approx \frac{56}{100} \cdot \Phi(0{,}91) + \frac{44}{100}\Phi(0{,}92)$

$\approx 0{,}8197$

5 10-16:03

Příklad 5. *Předpokládejme, že velká skupina studentů má ze zápočtové písemky ze statistiky bodové hodnoty normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Určete pravděpodobnost, že*

a) náhodně vybraný student bude mít výsledek lepší než 80 bodů,

b) průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude lepší než 80 bodů.

X ... bodový výsledek náh. vybraného studenta

$X \sim N(72; 9^2)$

a) $P(X > 80) = P\left(\frac{X - 72}{9} > \frac{80 - 72}{9}\right) =$ normujeme

$= 1 - P\left(\frac{X - 72}{9} \leq \frac{80 - 72}{9}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{9}\right)$ ($\sim N(0,1)$)

$\approx 1 - \Phi(0{,}89) = 1 - 0{,}81327 \approx 0{,}187$

b) $X_1, \ldots, X_{10} \sim N(72, 9^2)$

$M = \frac{X_1 + \ldots + X_{10}}{10} \sim N(72, \frac{9^2}{10})$

$P(M > 80) = P\left(\frac{M - 72}{9/\sqrt{10}} > \frac{80 - 72}{9/\sqrt{10}}\right) =$ ($\sim N(0,1)$)

$= 1 - \Phi\left(\frac{8}{9/\sqrt{10}}\right) \approx 1 - \Phi(2{,}8109) \approx$

$= 1 - 0{,}99752 \approx 0{,}0025$

5 10-16:03

$$\underline{\alpha} = P(L \leq G \leq U)$$

$\in \langle 0,1 \rangle$

dolní mez, statistiky (náh. veličina), horní mez

1. dáno L, G, U; urči α
2. dáno α, G; urči L, U [symetricky]
3. dáno α, L, U; urči „informace o G" (např. nutný počet měření pro dosažení požadované přesnosti)

5 10-17:14

Příklad 6. *Rychlost letadla byla určována v 5 zkouškách, jejichž aritmetický průměr byl $m = 870{,}3\,ms^{-1}$. Najděte 95% interval spolehlivosti pro μ víte-li, že měření rychlosti se řídí normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou $2{,}1\,ms^{-1}$.*

$R_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma = 2{,}1$

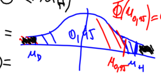
$i = 1, \dots, 5$

$$m = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{5} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right)$$

$$0{,}95 = P(D \leq \mu \leq H)$$

$$U = \frac{m - \mu}{\sigma / \sqrt{5}} \sim N(0,1)$$

$$0{,}95 = (u_D \leq U \leq u_H)$$



$\Phi(u_{0,95}) = 0{,}95$

$P(u_{1-\alpha} \leq U \leq u_\alpha) =$

$= P(-u_\alpha \leq U \leq u_\alpha) =$

$= \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) =$ $u_H = u_{0,975}$, $u_D = u_{0,025}$

$= 2\Phi(u_\alpha) - 1 =$ obecně $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$

$= 2\alpha - 1$

$\Rightarrow 2\alpha - 1 = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}975$

$\Rightarrow 0{,}95 = P(|U| \leq \underset{1{,}96}{\underset{\parallel}{u_{0,975}}}) = P(|U| \leq 1{,}96)$

$$= P\left(\left|\frac{m - \mu}{\sigma/\sqrt{5}}\right| \leq 1{,}96\right) = P\left(\left|\frac{870{,}3 - \mu}{2{,}1/\sqrt{5}}\right| \leq 1{,}96\right)$$

$$= P\left(-1{,}96 \leq \frac{870{,}3 - \mu}{2{,}1/\sqrt{5}} \leq 1{,}96\right) =$$

$$= P\left(870{,}3 + \underbrace{\frac{2{,}1 \cdot 1{,}96}{\sqrt{5}}}_{\sim 1{,}87} \geq \mu \geq -\frac{2{,}1 \cdot 1{,}96}{\sqrt{5}} + 870{,}3\right)$$

95% int. spol. $\langle 870{,}3 - 1{,}87 ; 870{,}3 + 1{,}87 \rangle$

5 10-16:03

Příklad 7. *Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu; 0{,}04)$. Jaký musí být nejmenší počet měření, aby šířka intervalu spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ nepřesáhla $0{,}16$, a to na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$?*

5 10-16:04

Příklad 8. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem 100 studentů zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.*

5 10-16:04