$(G,\cdot)$ $\quad \cdot : G\times G \to G$

$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N}_0,+)$, $(\mathbb{Z},+)$ grupoid

$(\mathbb{N},-)$ $\quad (1-2 \notin \mathbb{N})$ $\quad -(1,2)=1-2$

$(\mathbb{N},\div)$ $\quad$ NE

$(\mathbb{Q},\div)$ $\quad (1\div 0 \notin \mathbb{Q})$

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\div)$ $\quad$ ANO

2 23-13:55

asociativita: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ $\quad \forall a,b,c\in G$

$(\mathbb{N},+)$ ... pologrupa

$(\mathbb{Z},+)$ --- — " —

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\div)$ $\quad (a:b):c \neq a:(b:c)$

$(3:1):2 \neq 3:(1:2)$

není pologrupa $\quad \frac{3}{2} \neq 6$

$(\mathbb{Z},-)$ je grupoid, není pologrupa

2 23-14:22

monoid: $e\in(G,\cdot)$ jednotkový prvek

je jednoznačně určený

$\boxed{e\cdot a = a\cdot e = a}$ $\quad \forall a\in G$

Dk: e_1,e_2 jsou jednotkové v G:

$e_1 = e_1\cdot e_2 = e_2$ (l. jedn., p. jedn.)

Př. $(\mathbb{N},+)$ není monoid

$(\mathbb{N}_0,+)$ je $e=0$

$(\mathbb{N},\cdot)$ je $e=1$

2 23-14:28

grupa: $e\in G$

inverze $\boxed{\forall a\in G\ \exists b\in G}: a\cdot b = b\cdot a = e$

Značíme $b =: a^{-1}$ (aditivně $-a$)

$(\mathbb{Z},\cdot)$ nejsou inverze

Př.: $(\mathbb{Z},+)$ $\quad \forall a\in\mathbb{Z}: a+(-a)=0\,(=e)$

$(\mathbb{N}_0,+)$ monoid, není grupa

$(\nexists b\in\mathbb{N}_0: 1+b=0\,(=e))$

$(GL_n(\mathbb{R}),\cdot)$ ... regulární matice $n\times n$ nad $\mathbb{R}$

grupa, $e=E_n$; inverze k A je A^{-1}

$(Mat_{m\times n}(\mathbb{Z}),+)$ je grupa, $e=O_n$, —"— $-A$

2 23-14:34

komutativita operace $\cdot$ na G:

$a\cdot b = b\cdot a$ $\quad \forall a,b\in G$

$(\mathbb{Z},+)$ je komutativní grupa

$(Mat_{m\times n}(\mathbb{Z}),+)$ —"—

$(GL_n(\mathbb{R}),\cdot)$ je nekomutativní grupa

$(\mathbb{Z},-)$ je nekomutativní grupoid

2 23-14:46

$\mathbb{C}$ $\quad i^2=-1$

$z=a+b\cdot i$ $\quad a=\mathrm{Re}\,z$, $\quad b=\mathrm{Im}\,z$

$(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

$(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i) = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$

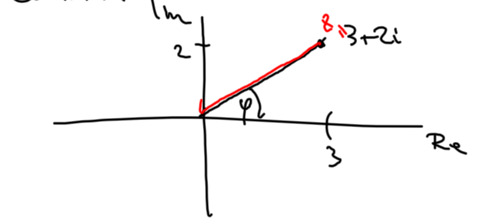
$(\mathbb{C},+)$ je grupa (komutativní)

$(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ je grupa —"—

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ je těleso

2 23-14:49

Gaussova rovina

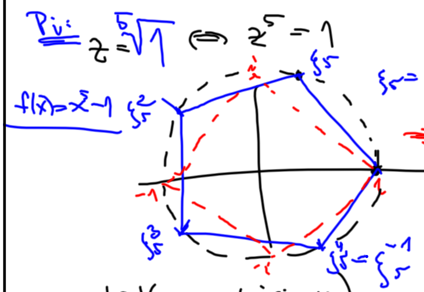


$$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

2 23-15:02

Př: $z = \sqrt[5]{1} \Leftrightarrow z^5 = 1$



$\xi_5 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

$\Rightarrow$ grupa 5-tých odmocnin z 1.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^5 = |z|^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) = 1 = |1|(\cos 0 + i\sin 0)$$

$\Rightarrow |z|^5 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

$\Rightarrow 5\varphi = 0 + 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = 0 + k\frac{2\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$

2 23-15:06

lin. zobrazení $\varphi: V \to V$

$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

$\varphi(a\cdot u) = a\cdot\varphi(u)$

V je vekt. prostor, $(V,+)$ je komut. grupa

$\varphi,\psi: V \to V$:

$\varphi\circ\psi \neq \psi\circ\varphi$

$(\varphi\circ\psi)(u) = \varphi(\psi(u))$

jednotka: $id(u) = u$

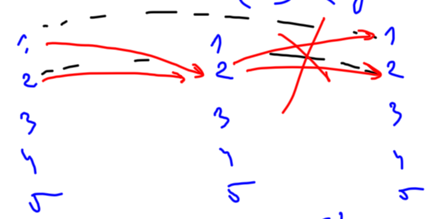
$\varphi(u) = \vec{0}\ \forall u\in V \Rightarrow \nexists\varphi^{-1}$, $(\varphi^{-1}\circ\varphi)u = id(u) = u$, $\varphi^{-1}(0) = 0$

2 23-15:14

$M \to M$

$|M| = m \to m^m$ zobrazení

$\alpha: M \to M$ invertibilní $\Leftrightarrow \alpha$ je bijekce



$\Sigma_m = S_m^{\alpha}$ $\quad |\Sigma_m| = |S_m| = m!$

2 23-15:21

řád 1 $\quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ řád 3

$1 \to 2 \to 3$

řád 3 $\quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$1 \to 3 \to 2$

$b^2 = b\circ b = c$

$\{a,b,c\} = \{b, b^2, b^3\}$

$\{c, c^2, c^3\}$

řád 2 $\quad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $2 \circlearrowleft 3$ $\quad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ř. 2, $1 \circlearrowleft 3$

ř. 2 $\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $1 \circlearrowleft 2$

2 23-15:27

G grupa:

Řáda: $c\circ a = c\circ b \quad |\cdot c^{-1}$

$c^{-1}\circ(c\circ a) = c^{-1}\circ(c\circ b)$ asoc.

$(c^{-1}\circ c)\circ a = (c^{-1}\circ c)\circ b$ inv.

$e\circ a = e\circ b$ neutr.

$a = b$

Zákon o dělení

V grupě $a\cdot x = a\cdot y \Rightarrow x = y$.

$x\cdot a = y\cdot a \Rightarrow x = y$

2 23-15:31